د. مايكل غيلن
MICHAEL GUILLEN



جسور إلى اللانهاية
الجانب الإنساني من الرياضيات

BRIDGES TO INFINITY
THE HUMAN SIDE OF MATHEMATICS

نظرة إنسانية جديدة إلى الرياضيات في قالَب أدبي ممتع

ترجمة: د. عامر شيخوني

مراجعة: أ. بدر الدين علاء الدين و د. عماد يحيى الفَرَجي





الطبعة الثالثة

جسور

إلى اللانهاية

الجانب الإنساني من الرياضيات

BRIDGES TO ONFINITY

THE HUMAN SIDE OF MATHMATICS

نظرة إنسانية جديدة إلى الرياضيات في قالب أدبي ممتع

د. مايكل غيلن
MICHAEL GUILLEN

جسور إلى اللانهاية

الجانب الإنساني من الرياضيات

BRIDGES TO INFINITY

THE HUMAN SIDE OF MATHEMATICS

نظرة إنسانية جديدة إلى الرياضيات في قالَب أدبي ممتع

ترجمة

د. عامر شيخوني

مراجعة

أ. بدر الدين علاء الدين – د. عماد يحيى الفَرَجي


الدار العربية للعلوم ناشرون
Arab Scientific Publishers, Inc.

يتضمن هذا الكتاب ترجمة الأصل الانجليزي
Bridges to Infinity: The Human Side of Mathematics
حقوق الترجمة العربية مرخّص بها قانونيًا من المؤلف
الدكتور عامر شيخوني
بمقتضى الاتفاق الخطي الموقّع بينه وبين الدار العربية للعلوم ناشرون

الطبعة الثالثة: كانون الثاني/يناير 2024 م – 1445 هـ

ردمك 978-614-01-3671-7



إصدار

الدار العربية للعلوم ناشرون م م ح

مركز الأعمال، مدينة الشارقة للنشر
المنطقة الحرة، الشارقة
الإمارات العربية المتحدة

التوزيع في المملكة العربية السعودية

دار إقـــراء للنـــشـــر

جوال: 585597200 971+ - داخلي: 0585597200
هاتف: 786233 – 785108 – 785107 (1-961+)
البريد الإلكتروني: asp@asp.com.lb
الموقع على شبكة الإنترنت: http://www.asp.com.lb

تصميم الغلاف: علي **القهوجي**

الإهداء

إلى روح الأستاذ القدير والمربّي الحكيم

بدر الدين علاء الدين

الأستاذ الذي علَّمنا ألاّ تَقبل الأمور إلا بعد التفكير

والتمحيص والبرهان ...

وعلَّمنا كيف نُضفي على حياتنا

حيويةً وإيمانًا

وكيف نجعلها حياةً تَستحِّقُ أنْ تُعاش.

مقدمة المترجم

تجولتُ في معرض الكتاب ببطء وتمهل وأنا أتفحص الكتب والمطبوعات العربية التي انتشَرتْ في كل اتّجاه... كتبٌ فاخرةُ التجليد وأخرى صَقيلة الورق، ومجلدات من أمهات المصَنَّفات وكُتيبات صغيرة مصفرّة الأوراق... عناوين كثيرة، كبيرة وصغيرة شَملتْ كل ما خطَر لي وما لَم يخطُر، ولاحَظتُ غِنى مكتبتِنا العربية بالكتُب الأدبية من قصص ومقالات ودراسات في الأدب والتراث والفكر والدّين والفلسفة والفَن والمسرح... حتى كُتب الأطفال التي كانت نادرة منذ سنوات قليلة، أصبحَ لها مَكانَها الواضح بألوانها الزاهية الجميلة وطباعتِها الأنيقة التي تجذب انتِباه الكبار والصغار. ولكن أين الكِتاب العلمي؟ لم أجِد سوى بعض الكُتب العلمية التي كانت تطلّ بصفحاتها القليلة على استِحياء في جوانب هامشية من رفوف المكتبات كعناوين ثانوية في صفحات جريدة... عناوين تائهة في بحر خضَم.

رجعتُ بذاكرتي قليلًا إلى يوم كنتُ أُحضِّر فيه لتقديم محاضرة بسيطة في الفيزياء، لجأتُ آنذاك إلى بعض المراجع التي كان من بينها موسوعةٌ في عِلم الفيزياء تتألف من مجلد ضخم يزيد عدد صفحاته على ثلاثة آلاف صفحة... وبينما كنت أبحثُ في صفحاتها وأقلِّبُ مواضيعها المتنوعة الغنية، انتابَني فجأة شعور مُبهم بالغربة والشّرود، وتَساءلتُ كم قدَّم العرب والمسلمون مِن جُهد في عِلم الفيزياء هذا؟ وما هو قَدْرُ مُساهماتهم في هذا العِلم منذ نشأته في بداياته العلمية البسيطة حتى وصَل إلى تطوّره المُذهل هذه الأيام؟ كان تقديري المتواضع آنذاك أنّ مُجمَل مُساهماتنا في عِلم الفيزياء وما يحتويه مِنْ معلومات وملاحظات ونظريات لا يُمكِن أنْ يَتجاوز نسبة متواضعة ربما لا تزيد عن خمسة بالمئة مِنَ المعلومات العلمية التي تضمّها هذه الموسوعة الفيزيائية الحديثة...! كما أنّ أغلب، إنْ لم يَكن كلّ ما قدَّمناه مِنْ إضافات علمية في هذا المَجال قد تمّ منذ قرون بعيدة مَضتْ، عندما كانت شَمس الفِكر العربي الإسلامي ساطِعة على العِلم بفضل جهود علماء فَطاحِل، مِثل الحسن بن الهيثم، ومحمد بن موسى الخوارزمي، وثابت بن قرّة، ويعقوب الكِندي، وأبو بكر الرازي، وابن يونس المصري، ومحمد بن الحسن الكَرخي، وأبو الرّيحان البَيروني، والشيخ الرئيس ابن سينا، وأبو الفتح الخازن، وابن باجة، وابن طُفيل الأندلسي، ونصير الدّين الطّوسي، وغيرهم ممن بَرعوا في العلوم والرياضيات، وقدَّموا للحضارة الإنسانية إضافات هامة على طريق التقدم والازدهار... إلا أننا لمْ نُضِف جديدًا يُذكَر منذ القَرن الميلادي الخامس عشر حتى الآن..! وإنّ نظرةً

سريعة على الكُتب المَطروحة في المَعارض والمكتبات تُشير بوضوح إلى أننا ما زلنا نعيش الماضي ونَجتَرّ عَظمَته، ونَتوهَّم أنّ ما حقَّقه أجدادُنا كافٍ لكي يَمنَحنا شعورًا كاذبًا بالعظَمة، ووَهمًا خادِعًا بأننا نُحقّق ذاتنا الآن، ونشترك في رَكب التقدّم والحضارة... إنما في الواقع لقد سبَقَنا مَسارُ العِلم أشواطًا مضاعفة. وبينما كنا نحن نَحبو ونَكبو، ونعيش عظَمةَ تاريخنا كأنما هو حاضرنا، ونَجترُّ أحلامَ اليقظة وكأنها واقِع حَيّ... كان العالَم يُتابع سَيره حثيثًا، ويَجتازنا سريعًا، حتى سَبَرَ أغوار الذَرَّة، وخاضَ أعماق البحار والفضاء... وتراكَمتْ أمامَنا نتائج البحوث والعلوم ونحن نَحلم ونتَمنى...

ما نحتاج إليه الآن هو الجدّ والعمل وليس التَّمني والرَّجاء. ما نحتاج إليه الآن هو إدراك مأساة واقِعنا المتخلّف بدلًا مِنَ العيش في أحلام ماضينا العَتيد. عندما وَجَد أجدادُنا أمامهم حضارة اليونان والرومان والفرس والهند، وأدرَكوا موقفهم الحقيقي في العالَم، تقدَّموا ولَعبوا دَورهم في صُنع الحضارة بثقة وإيمان. قاموا أولًا بعملية ترجمةٍ مُنظَّمَة منهَجية شاملة لأهمّ ما كَتبه القدماء، واستوعَبوا ذلك العِلم، وهضَموه وتمثَّلوه، ثم أضافوا عليه، وقدّموه ذُخرًا جديدًا على طريق الحضارة والتقدم الإنساني.

وها نحن الآن مِنْ جديد في مَوقع التلقّي والاستهلاك والتَّخلف العلمي، تَنقصُنا المعرفة، وتَنقصُنا الثقة بالنفس، ويَنقصُنا الإيمان... لمْ نعرف بَعد عُمقَ مشكلتنا، ولمْ نُدرك بَعد موقفنا الحقيقي في العالَم ودَورنا الغائب في صُنع الحضارة، يجب أنْ نبدأ أولًا بإدراك تخلّفنا. أنْ نُدركَ ونَعي أبعاد تَخلفنا، وعُمقَ تأخّرنا، وصعوبة موقفنا بكلّ جرأة وصراحة ووضوح، وأنْ نواجِه هذه المشكلة الصعبة بصَراحة ونَقاء حتى يمسَّ الألمُ والحزن أعماق عِظامنا، ويحرّكَ فينا الرغبة الأكيدة في التّخلص مِنْ أغلالِنا، ويَدفعنا إلى العمل الصادق الدَّؤوب على طريق الحضارة والتقدم، مُسلَّحين بالفَهم الناضج السليم لدِيننا العظيم، ومُنطَلِقين بثقةِ الإيمان نحو تحصيل العِلم مثلما انطلقَ أجدادُنا مِنْ قَبل شرقًا وغربًا وشمالًا وجنوبًا نحو نور العِلم ويَقين المعرفة.

يجب أنْ ندركَ عُمق مشكلتنا أولًا، ونحسَّ بها في صميم قلوبنا وأرواحنا، وأنْ نرغَب صادقين في حلِّها وتَجاوزها، ثم نُترجِم هذه الرغبة الأكيدة إلى عَمل صابر دَؤوب نحو تحقيق الهدَف المطلوب: حَلّ مشكلة التَّخلف. إنّ تَعلُّم المعارف الحديثة، وسَدّ الفراغ الهائل في مكتبتِنا العربية هو فَرضُ كفاية، بل ويكاد يُصبح فَرضَ عَين على كلِّ قادر هذه الأيام... والله أعلم.

شَطَح بي الخيال بعيدًا عن الرياضيات، وهي موضوع الكِتاب الذي أحببتُ قراءته لبَساطته ووضوحه.. مِن النادر أنْ يقرأ المرء كِتابًا يبحث في موضوعٍ صعب كالرياضيات، ويَشعر في الوقت نفسه أنّ الكِتاب بسيط وواضح، وإن تحقَّق ذلك، فإنه يدلّ عادةً على فَهمِ المؤلف لِموضوع البحث، وعلى قدرته الجيدة في التعبير والشّرح والتوضيح.

تحت عنوانه الطريف: "جسور إلى اللانهاية" يَنطلقُ المؤلف مايكل غيلن Michael Guillen ليعبُر بنا أنهارًا وطُرقًا وَعرة في ساحات الرياضيات القديمة، ومَسالكها الحديثة جِسرًا بَعد جِسر حتى نَصل إلى فَهمٍ بسيط وواضِح لِكثير مِنْ جوانب الرياضيات... وهو يفعل ذلك دون أنْ يَستخدم الرموز الرياضية الغامضة والمعادلات المعقدَّة، بل يلجأ إلى لُغة سهلة، ويَستعين بأمثلة

عملية مباشرة، تقرِّب إلى أذهاننا وإلى خيالنا آفاق عالَم الرياضيات، ويَجعلنا نعيش تلك الآفاق البعيدة ونحسّ بها حتى كأننا فيها أو هي فينا... وبعد أنْ نَنتهي مِن قراءة الكِتاب، يَنتابنا إحساسٌ عميق بأننا قد أصبحنا أكثَر وَعيًا وفَهمًا وعِلمًا لكثير مِن جوانب الحياة نفسها، لأنّ الرياضيات قد دَخلَت الآن عمليًّا في فَهم كثير مِنْ جوانب الحياة، ولمْ تعد مجرّد أعداد ورموز ومعادلات جامِدة باردة غريبة، فهو لا يتَحدّث إلينا عن الحساب والجَبر والهندسة، بل يتحدَّث عن الأرض الزراعية وعن الصناعة والتجارة والبنوك والاقتصاد، ويتَطرَّق إلى دَور الرياضيات في ألعابِنا وتَسليتِنا وحروبنا وسَلامنا ومشاعرنا وكثير مما نُحبّ ونَكره... نعم لقد تخلّلت الرياضيات الآن دقائق الحياة اليومية العادية للإنسان المعاصِر، وأصبح مِنَ المحتم علينا أنْ نحاول فَهمَها واستيعابها، وأنْ نسعى إلى تَجاوز الرَّهبة والقلق والتوتر الذي يَنتابُنا عندما نَقترب مِنْ دراستها... ذلك القلق والتوتر الذي يَنتابُنا عند الاقتراب مِن دراسة الرياضيات هو ما يحاولُ مؤلفُ هذا الكِتاب أنْ يتجاوزه، وأنْ يسير بنا بهدوء ويُسر نحو الوَعي والفَهم والإدراك... ولذلك قَررتُ ترجمةَ هذا الكِتاب، وأضفتُ إليه أكثر من سَبعين ملاحظة عن العلماء الذين وَردَتْ فيه أسماؤهم، كما أضفتُ الأشكال والصّور التوضيحية، وصورَ أهمّ المَذكورين من علماء الرياضيات. وكذلك أضفتُ الملاحظات الهامة لأستاذ الرياضيات الكبير بدر الدين علاء الدين التي تَفَضّل بطَرحها ومناقشَتها بالتفصيل في جلسات عديدة عزيزة وغالية معه قُبيل وفاته رحمه الله. وضعتُ الملاحظات والإضافات بين قوسَين مستقيمَين [ ] للتوضيح. أتمنّى أنْ يَستمتع أبناء العربية بقراءة هذا الكِتاب، وأنْ يُقَدَّم لَهم كَجهد متواضِع بسيط عَسى أنْ يشجّع بعضَنا على مزيد مِن الترجمة والعطاء في فترة نحن أحوَج ما نكون فيها إلى العِلم والمعرفة، وإلى تجاوز الجهل والتخلف.

عامر شيخوني – 1986

المؤلف في سطور

وِلِد الدكتور مايكل غيلن Michael Guillen في الولايات المتحدة الأمريكية سنة 1954، وحصَل على شهادة البكالوريوس في العلوم من جامعة UCLA في كاليفورنيا، وعلى شهادة الماجستير ثم الدكتوراه في الرياضيات والفيزياء من جامعة كورنل في نيويورك سنة 1984. عمل في تدريس الرياضيات والفيزياء في جامعة هارفارد، كما كان محرّر المادة العلمية في محطة ABC في التليفزيون الأمريكي منذ عام 1985. سافَر في عدة رحلات علمية شملت القطبين الشمالي والجنوبي، وهو عضو في لجنة أبحاث الرياضيات والعلوم وتدريس التكنولوجيا في الأكاديمية الوطنية للعلوم National Academy of Science، وعضو مؤسس للجمعية الوطنية للإعلام العلمي National Association of Science Broadcasters. حصَل على جائزة المدرّس المتميز في كل من جامعتَي كورنل وهارفارد في الولايات المتحدة الأمريكية.

نُشرتْ له الكتب التالية:

- **جسور إلى اللانهاية** Bridges to Infinity. نُشر في عام 1984. حصل على عدة جوائز عالمية وتُرجم إلى الألمانية والفرنسية واليابانية والبرتغالية.

- **خمس معادلات غَيَّرتْ العالم** Five Equations That Changed the World. نُشر في عام 1996. حصل أيضًا على عدة جوائز عالمية.

- **هل يستطيع الشخص الذكيّ أن يؤمن بالله؟** Can a Smart Person Believe in God? نُشر في عام 2006.

- **نهاية الحياة كما نعرفها: أخبار مشؤومة من أقصى حدود العلوم** The End of Life as We Know it: Ominous News from The Frontiers of Science. نُشر في عام 2018.

جسور إلى اللانهاية

مقدمة المؤلف: رَهبَةُ الرياضيات

"يتألف الإنسان مِن جِسم وعَقل وخَيال. في جِسمه نقائص وعيوب، وعقله ليس جَديرًا بالثقة، ولكنّ القدرة على الخيال والإبداع جَعلت مِن الإنسان ذلك الكائن الفريد المتميّز الذي تمكَّن خيالُه الفيّاض خلال قرون قليلة مِن جَعل الحياة على هذا الكوكَب مُمارسةً فعّالةً لكلّ الطاقات الجميلة".

جون ماسفيلد John Masefield من كتاب "شكسبير والحياة الروحية Shakespeare and Spiritual Life"

يمكنني توضيح أغلب الأسباب التي دفعَتني إلى تأليف هذا الكِتاب فيما نُشر عمّا حدَثَ ذات يوم في القَرن الثامن عشر عندما واجَهَ عالِمُ الرياضيات الألماني الكبير ليونهارد أويلر[1] Leonhard Euler المفكّرَ الفرنسي الملحِد دُنيس ديدرو[2] Denis Diderot بإثباتٍ رياضي غريب للبرهان على وجود الله. يبدو أنّ أويلر قد ذَهبَ للقاء ديدرو الذي كان آنذاك في حضرة المجلس الملَكي لقيصر روسيا. تَذْكُر القصة أنه في اليوم الذي وصَل فيه أويلر، تَوجَّه مباشرةً إلى ديدرو وصرخ قائلًا: "سيدي: $س = ص/(أ+ب^{ن})$ ولذلك فالله موجود. أجِبْ!". كان المفكّر الفرنسي قبل ذلك قد دَحضَ ببلاغَة وقوة كلّ الأدلة الفلسفية الذكية الدّالَّة على وجود الله... ولكن عندما لمْ يستطع ديدرو أنْ يفهَم مَعنى هذه المعادلة الرياضية، وَجَد نفسه مضطرًّا لالتزام الصمت، وطَلَبَ مغادرة روسيا.

تُصَوّر هذه القصة نموذجًا لما يَحدث مِن حِوار بين علماء الرياضيات وغيرهم مِن الناس في مجتمعنا، وهو حِوارٌ غير موجود على الإطلاق. ولا أقصد هنا اتهامَ أية جهة معيّنة بأنها سبب الغموض والإبهام، وسبب عدم الفَهم الذي يحيط بالرياضيات بشكل عام، ولكنني أُلمّح فقط إلى أنّ الرياضيات غير واضحة وغير مفهومة بالنسبة لِغير المختصّين بها. وهذا ما مثّله اضطراب وصَمت المفكّر ديدرو في مواجهة التّحدي الذي طرحَه أويلر كرَدِّ فِعلٍ تجاه الرياضيات يَعرفِه أكثر

الناس، حتى أولئك الأذكياء منهم مِثل ديدرو، وهو الصمت. الصمت هو المظهر الرئيسي لوباءٍ شائع قديم يسمَّى هذه الأيام: الخوف أو الرَّهبة مِنَ الرياضيات.

رَهبَةُ الرياضيات هي الخَوف المَرَضيّ، والشعور المُبهَم بالمَهانة والخجل والارتباك الذي يَبعثه علماء الرياضيات لدَى مئات الملايين مِنَ الناس. كان هذا رَدُّ فِعل الناس في مواجهة الرياضيات على مَرِّ التاريخ. وعلى الرغم مِن أنّ هذا الخوف المرَضي نفسه لمْ يتغيّر كثيرًا، إلا أنّ النتائج التي تترتَّب على كَوننا ضحية له قد تَغيَّرتْ بشكل جَذري.

بالنسبة إلى ديدرو، فإنّ كَونه ضحية الإصابة بالرَّهبة مِنَ الرياضيات يعني أنه لمْ يكُن قادرًا على استيعاب وتقدير الجوانب العديدة الفريدة التي تمثِّلها الرياضيات، وتؤثّر مِنْ خلالها على اهتمامات الإنسان وأفكاره، حتى فيما يتعلّق بأسئلته عن وجود الله. سَنناقِش أغلب هذه الأمور في هذا الكِتاب. أما بالنسبة إلى إنسان اليوم، فإنّ إصابته بالخوف أو الرَّهبة مِنَ الرياضيات تعني مِثل ما حَدَث لديدرو وأكثَر... إنها تعني عدم قدرته على فَهم عالمنا التكنولوجي المعقّد... فبدون هذا الفَهم، يتَحول المرءُ إلى مُشاهِد بدلًا مِنْ أنْ يكون مُشارِكًا فاعلًا وخلَّاقًا في هذا العالَم.

مِنَ الصعب أنْ نبالغ في أهمية استِخدام الأعداد في وَصفِنا لِحقائق الطبيعة وما وراء الطبيعة. ومِنَ الصعب أنْ نقلل مِنْ خطورة عدم قدرة الإنسان الذي تُرهِبه الرياضيات على فَهم هذه الحقائق. عبَّر غاليليو[3] Galileo عن أهمية الأعداد في علوم الطبيعة والفيزياء بقوله إنّ كِتاب الطبيعة قد كُتِب بلغة الرياضيات. وتُعطي الكبّالا Cabala (وهي طقوسٌ غَيبية صوفية يهودية) مِثالًا لِجُملةِ المعاني الصوفية الغَيبية الكثيرة التي تُسبِغها بعضُ الديانات على الأعداد.

رهَبةُ الرياضيات هي مِثل الشيخوخة، ليست مرَضًا واحِدًا، بل هي أمراض متعدّدة، يَصدر كل منها عن سوء فَهم أو عدم وضوح لِجانب من جوانب الرياضيات. ولعل أهمها يتمثَّل في قصة أويلر - ديدرو مما أعتقده واضحًا لدَى أي قارئ لهذا الكِتاب.

أولًا وقَبل كل شيء، يَرتكِز الخوف من الرياضيات على التصور الخاطئ لدى غير المختصين بها بأن الرياضيات ليس فيها أي نوع من العجز أو القصور، وهذا أحَد أسباب اضطراب ديدرو وصَمته حِيالَ تأكيدِ أويلر المفاجئ، والأمر الثاني والحاسِم هو عدم دراية ديدرو وأمثاله بالصعوبات التي كانت تواجِه علماء الرياضيات في ذلك العَصر في فَهم كثير من المفاهيم الرياضية الجديدة مثل معنى اللانهاية. يوضّح فَصلُ "ما بَعد اللانهاية" أنّ المعادلات الرياضية التي ساعَدتنا على فَهم طبيعة اللانهاية وما يأتي بَعدها لَمْ تَتضح حتى صاغَها الألماني جورج كانتور[4] George Cantor في أواخر القَرن التاسع عشر.

يبدو أنّ ذلك كان إنجازًا هامًّا، وقد كان كذلك بالفعل... كما كان بالإضافة إلى ذلك الحلقة الأولى في سلسلةٍ مِنَ الإنجازات الهامة التي سَتُناقَش في أول فَصلٍ مِن هذا الكِتاب: "كنز اليقين" والتي أَوضحتْ لعلماء الرياضيات بعض العيوب والنواقص فيها. حتى ذلك الوقت، آمَن علماءُ الرياضيات بالقدرة غير المحدودة، وباليقين الكامل الذي تَحمله الرياضيات في إثبات الحقائق بشكل

منطقيّ مؤكّد. ولكنّ العيوب والنواقص التي اكتُشفتْ في الرياضيات ساعدتْ على توضيح الجانب الإنساني للرياضيات بتِبيان أخطائها، وتِبيان إصرار وتفاؤل علماء الرياضيات المعاصِرين في محاولاتهم لِتجاوز هذه العيوب والنواقِص. كما يُساعد اكتشاف هذه العيوب والنواقِص على تقسيم تاريخ الرياضيات إلى مراحل أسميتُها في هذا الكِتاب: "التَّخيل المِثالي" و"التنازلات" و"التفاؤل". ترتبط هذه المراحل بالفترات التي سَبقتْ، أو تَخللتْ، أو تَلَتْ تلك الإبداعات التي نُشِرتْ بين منتصف القَرن التاسع عشر وبداية القَرن العشرين. حَسب هذا التقسيم، فإنّ جزء "التَّخيل المِثالي" مِنْ هذا الكِتاب يَبحثُ في تلك المواضيع التي دُرِسَتْ في فترةٍ آمَن فيها علماءُ الرياضياتِ باليقين المُطلق، والكمال الذي تَحمله الرياضيات. أما جزء "التنازلات"، فيَتضمَّن دراستَين تَطرحان الموضوعَين الرئيسَين اللَّذَين غَيَّرا إيمانَ علماء الرياضيات باليقين المُطلق فيها. ويتألف جزء "التفاؤل" مِنْ دراسات عن المواضيع التي تطوّرتْ في هذا القَرن عندما أدركَ علماء الرياضيات عيوبِ ونواقِص الرياضيات، وحاولوا تَجاوزها ما استطاعوا. وأنا أدعو القارئ إلى محاولة اكتشاف تفكير ونفسية علماء الرياضيات في كلٍ مِنْ هذه الدراسات.

يزيد سوء فَهم مشكلة مَحدودية الرياضيات وقصورها مِنْ رَهبة الرياضيات. كان مِنَ المُمكن أنْ يُخفَّف الأمر على ديدرو لو أنه أدركَ أنّ الرياضيات ليست عِلمًا، وأنها لا تستطيع إثبات وجود الأشياء الحقيقية أو نَفي وجودها. في الحقيقة، إنّ أقصى ما يَصبو إليه عالِم الرياضيات هو أنْ تكون معادَلاته واستنباطاته منسَجمة ومنطقية في حدِّ ذاتها، وليس أنْ تكون بالضرورة حقيقية وواقعية. ولا يعني هذا أنّ الاستنباطات والعلاقات الرياضية لا ترتبط أبدًا بأشياء حقيقية، بل أنها ترتبط بهذه الأشياء في أغلب الأحيان. بل إنّ التوافق بين الأفكار الرياضية والحقائق الطبيعية أمرٌ قد أُثبِتَ في كثير من المقالات والدراسات لِدَرجة أنّ هذا التوافق ذاته يحتاج إلى تفسير وفَهم. ويجب الانتباه إلى أنّ هذا التوافق لمْ يَنشأ عن محاولة علماء الرياضيات أن يكونوا واقعيين، بل على العكس مِنْ ذلك، فإنّ أفكارهم غالبًا ما تكون في بدايتها نظرية مجرّدة، ولا يبدو فيها ظاهرًا وجود أية علاقة لها بالعالَم الواقعي الحقيقي. ولكن تطبيق هذه النظريات الرياضية المجرَّدة فيما بَعد على كثير من الحقائق الواقعية، أدَّى إلى تفسير هذه الحقائق بالشكل المطلوب، وهذا ما سنُبيّنِهُ في فَصل "اختراع الحقيقة".

يَفترضُ أغلبُ الدَّارسِين الذين يحاولون تفسير هذا التوافق والانسجام المُدهش بين عالَم الرياضيات وعالَم الحقائق الفيزيائية، كما افتَرضَ غاليليو، أنّ هذا التوافق يُشير إلى البِناء الرياضي للطبيعة والكَون، وإلى أنّ علماء الرياضيات يتَحدَّثون بلغةِ الطبيعة، ومِن المنطقي أنْ نتوقَّع انسجام كلامهم ونظرياتهم مع الحقيقة والواقع، حتى لو لم يقصدوا ذلك. أما تفسيري الخاصّ لهذا التوافق والانسجام فهو أنّ قدرة الإنسان على التّخيل والتّصور هي حاسّة سادسة. وحَسب هذا التفسير، فإنّ انسجام النظريات الرياضية مع الحقيقة والواقع إنما يعود ببساطة إلى كَونِها ملاحَظَة ومشاهَدة، أكثَر مِنْ كَونها اختراعًا. أعتقدُ أننا ندركُ الحقائق والوقائع بتخيلنا وتصوّرنا مثلما نُدركها بحواسِّنا الخَمس. وإنّ توافق العالَم الحقيقي مع تصورات هذه الحاسَّة السادسة هو مِن نَوعِ التوافق الذي يوجَد بين العالَم الحقيقي وبين إحساسنا بالضوء والصوت والتذوق واللمس والرائحة. وبينما يراقِبُ العلماء الظواهر الطبيعية بجميع حواسّهم الخَمس، فإنّ علماء الرياضيات يراقبون الطبيعة بحاسّة التخيل والتصوّر فقط. وهذا يعني أنّ علماء الرياضيات مُتخصِّصون ومُدرَّبون على استعمال حاسَّتهم السادسة هذه، مثلما يتخصَّص الموسيقيون بالأصوات، والذَّواقون بالطّعمات والروائح،

والمصوّرون بالمَناظر... وهذه مقارَنةٌ تعني أيضًا أنّ علماء الرياضيات هم فنانو التّخيل والتّصور مَثَلُهم كَمَثَل الموسيقيين والذّواقين والمصورّين كُلًّا في مجال إحساسِه. يَشرح لنا علماء الرياضيات بمعادلاتهم الفريدة وتشكيلاتهم المميزة حقائقَ كوننا دون أنْ يكون لدَيهم القَصد أو القدرة على إثبات وجود أو عدم وجود شيء ما.

آخِر الأخطاء في فَهم الرياضيات الذي نستخلِصَهُ مِنْ ردِّ فعل ديدرو على ادِّعاء أويلر هو خطأ شائع بين علماء الرياضيات وغيرهم. وهذا الخطأ هو الاعتقاد بأنه لا يمكن التعبير عن الرياضيات إلا بلغة الأرقام والرموز. يَقودُ هذا الاعتقاد الخاطئ كثيرًا مِنْ علماء الرياضيات إلى اعتبار أن كل جُهدٍ لشرح النتائج الرياضية بلغةٍ عادية هو جُهد ضائع لا يفيد. كما يَقود هذا الاعتقاد الخاطئ الآخرين إلى التواضع في آمالهم ورغباتهم في فَهم الرياضيات. وربما أدَّى ذلك عند كثير مِن الناس إلى الاقتناع بأنهم لن يفهموا أي شيء عن الرياضيات.

بين كل جوانب الرّهبة مِنَ الرياضيات التي وصفتُها، فإنّ هذا الجانب يمكن تصحيحه بسهولة إذا تَشجَّع علماء الرياضيات على تغيير موقفهم. ومِنَ المحزن القول إنّ أغلبهم يؤمِن بما نَشَره عالِم الرياضيات الإنكليزي غودفري هاردي[5] Godfrey H. Hardy في مذكراته "اعتِذار عالِم رياضيات A Mathematician's Apology" حيث ذَكر أنّ شرح العلاقات الرياضية هو مِنْ صفات العقول المُبتدئة، وقال إنّ العلماء الذين يُمارسون الرياضيات يَحتقرون أولئك الذين يحاولون شرحَها لُغويًّا للآخرين، لأنّ مِثل هذا الجهد هو عَبث ومَضيعة للوقت!

على الرغم من أنني أخاطِر بوَضع نفسي في هذه المَرتبة المُبتدئة مِنَ العقول، فقد سَطَّرتُ هذا الكِتاب لأنني أؤمن، كما آمَن العالِم الرياضي الكبير برنهارد ريمان[6] Bernhard Riemann، أنه مِنَ الممكن توضيح وشَرح مبادئ الرياضيات ونظرياتها لِغير العارفين بها. فبِمناسبة ترشيحِه لِمنصبٍ جامعيّ في جامعة غوتينجن Göttingen University بألمانيا، ألقَى ريمان محاضرةً في موضوع معقّد هو (أُسُس الهندسة) دون أنْ يَستخدم معادلة رياضية واحدة. وحَظِيتْ محاضرته التي استمعَ إليها المدرّسون والمدرّسات بنجاح باهر. استنادًا إلى ما فعلَه ريمان، كَتبتُ هذه الدراسات بلغة واضحة، دون اللجوء إلى المعادلات الرياضية. ولا يعني ذلك أنّ هذه الدراسات قد كُتِبَتْ بتبسيط وبمستوى سَهل منخفض، بل أنها كُتِبَتْ بحيث تحظَى بقبول ديدرو وريمان على حدٍّ سواء. فبالإضافة إلى محاولتي تقديم حلٍّ لمشكلة الرَّهبة مِنَ الرياضيات، حاولتُ في هذه الدراسات أنْ أبعَث في نفسِكَ شيئًا من البهجة والسعادة مثل التي شَعرتُ بها منذ بدأتُ دراسَة الرياضيات في طفولتي. لعلكَ سَتوافقُني بَعد قراءة هذه الدراسات، أنّ خيال علماء الرياضيات عندما يتوجه في النهاية إلى تطبيق ما وصَل إليه من نتائج في مجالات الحياة العملية الواقعية المختلفة، فإنه يُحقّق أيضًا نجاحًا مماثلًا للنجاح الذي حقَّقه في حَلّ مسائل الحساب والهندسة. وإذا حدَثَ معك ذلك، فإنني سأكون قد نجحتُ في إزالة وَهمٍ آخر مِنَ الأوهام التي تتعلّق بالرياضيات. وهذا الوَهم هو أنّ الرياضيات عقلية صِرفة، ونظرية بَحتة، بحيث إنها لا تتعلّق مِنْ قريب أو بعيد بتصرفات الإنسان التي تتَّسم بالمنطقية والعقلانية. كان هذا اعتقادًا عبَّر عنه ألدوس هكسلي Aldous Huxley عندما

كتَب: *"لقد تعلّمنا أنْ ليس هناك مِنْ شيء بسيط ومنطقي إلا ما اخترعناه نحن بأنفسنا، وأنّ الإله لا يفكِّر حسب منطق إقليدس ولا منطق ريمان"*. وقد أوضحتُ في فصول "الضَّامَة والشطرنج" و"نداء شَريعة الغاب" و"التَّناظر المجرَّد" و"لا شيء أفضَل مِن الفطرة والبَديهة" أَنّ فهم الرياضيات يساعدنا كثيرًا في محاولاتنا العديدة لفهم الطبيعة الإنسانية ووجود الإنسان. غابَ عن نظَر هكسلي وأولئك الذين يتَّفقون معه في الرأي، أنّ علماء الرياضيات لا يَخترعون النظريات التي تَتناقَض مع تعقيدات الحياة، بل يُراقِبون الحياة بأوضَح الحواس، وهي حاسة الخيال، تلك الحاسَّة التي تَرى أمورًا لا تستطيع الحَواس الخَمس الأخرى أنْ تراها. حاسَّةٌ لمْ يَملكها ولمْ يُدرِّبها ديدرو بكلّ عبقريته ونظرياته، على الرغم من أنه كان يستطيع أنْ يفعل ذلك، لأنّ خيالنا هو حاسّة يمكن تدريبها وتنميتها، حاسّة لا تحتاج إلى ذكاء خاص، وإنما تحتاج إلى تَعلّم طرائق وأساليب الرياضيات.

مايكل غيلين

المرحلة الأولى

"الخيال المثالي"

كنز اليقين:

المنطق والبرهان

"البرهان هو الوَثن الذي يُعذِّب العالِم الرياضي نفسَه في سبيله".

سير أرثر إيدينغتون Sir Arthur Eddington يَندر أنْ نَجد إنسانًا لا يفضِّل اليقين على الشك في أغلب القضايا، ولكن الإنسان الذي يتوصَّل إلى اليقين في أغلب القضايا هو أكثَر ندرة. وكأنما اليقين كنز مخبّأ علينا أنْ نَجد الخريطة التي يمكن أنْ تقودنا إليه. تَصَوَّرَ علماءُ الرياضيات في القَرن الرابع قبل الميلاد أنهم قد اكتشفوا خريطة الوصول إلى اليقين في مبادئ منطق أرسطو[7] Aristotle. طبَّق إقليدس[8] Euclid هذه المبادئ في إثبات نظرياته الهندسية التي لَقيتْ ترحيبًا وقبولًا عظيمًا على أنها نماذج لليقين على مدى 2000 سنة. ولكن في أواخر القَرن التاسع عشر، عندما طبّق علماء الرياضيات المبادئ ذاتها على إثبات نظريات الأعداد والحساب، وصلوا إلى كنزٍ مِنَ المتناقضات بدلًا مِن الوصول إلى كنز اليقين... وفشِل منطق أرسطو...!

أدَّى هذا الاكتشاف إلى انقسام علماءَ الرياضيات إلى مدارس فكرية متعددة، وادَّعتْ كل فئة أنها تمتلك خريطة ستُعيد كل علماء الرياضيات إلى البرهان واليقين. وحُسِم هذا الخلاف سنة 1931 باكتشاف آخَر جديد... اكتشاف يقضي بعدم إمكانية التوصل إلى اليقين الكامل في الرياضيات...!

أَحزنَتْ هذه النهاية الحاسمة بعض علماء الرياضيات ودفَعتهم إلى محاولة تجاوزها بطريقة أو بأخرى دون نجاح حتى الآن، تَقَبَّل أغلبهم هذا الواقع، وتعلَّموا التعايش معه وقبول الشك كجزء لا بدّ منه في العمل... ولكنّ هذا القبول ظلَّ مَشوبًا بالرَّفض، لأنّ هؤلاء العلماء ما زالوا يحلمون باسترجاع كنز اليقين الذي كانوا يمتلكونه ذات يوم.

بلَغتْ مَوجة اليقين الرياضي ذُروتها في القَرن الرابع قبل الميلاد مع ظهور كِتاب أرسطو في المنطق Organon، وكِتاب إقليدس في العناصر Elements. كان الاعتقاد الشائع آنذاك أنّ كِتاب المنطق قد فتح الطريق إلى البرهان المنطقي، وأنّ كِتاب العناصر كان كنز اليقين بِعَينه.

وضَعَ أرسطو في كتاب المنطق أُسسَ الاستنتاج المنطقي في أربع عشرة قاعدة وبضعة قوانين يمكن الانطلاق بها مِنَ المقدمات والفرضيات والوصول بواسطتها إلى البرهان واليقين بشكلٍ منطقي سليم. بين هذه القوانين: قانون الذاتية: (كل شيء يماثل ذاته)، وقانون التناقض: (لا يمكن لشيء أنْ يكون موجودًا وغير موجود في الوقت ذاته)، وقانون رَفض الحلّ الوسَط: (يكون التعبير أو الحل إما صحيحًا أو خطأً، ولا يوجد هناك احتمال ثالث). تُعَبّر هذه القوانين عن حقائق يعتبرها أغلبنا حقائق بديهية، في حين كانت تلك القواعد نتيجة للدراسة الدقيقة المتفحصة التي قام بها أرسطو للقياس المنطقي.

القياس المنطقي هو عملية ذهنية مِنْ مراحل ثلاث في الاستنتاج وفق النموذج التالي: (إذا كان) كل إنسان فان

(وإذا كان) سقراط إنسانًا

(إذًا) فسقراط فان

الجُملَتان الأوليتان هما الفَرَض، والجُملة الثالثة هي الاستنتاج الذي يَنبثق بالضرورة عن الفرَض كما قال أرسطو. يمكننا أنْ نشكّ بصحة الفرَض، ولكن، إذا اتَّبعنا قواعد الاستنتاج المنطقي فلا يمكن الشك بصحة النتيجة. فمثلًا، يمكننا أنْ نشكّ بصحة الفرَض الذي يقول: "كلُّ السُّعداء محبوبون"، وأنْ نشكّ بالفرَض الذي يقول: "صالح رجل سعيد"، ولكننا لا نختلف على أنّ هذه المقدمات تقودُنا بالضرورة المنطقية إلى الاستنتاج: "صالح محبوب".

هذا هو بالضبط ما يعنيه "اليقين المنطقي". وقد اعتُبِرتْ قواعد المنطق التي وضَعها أرسطو دلائل الوصول إلى اليقين، لأنها وضِعتْ في صيغة القياس المنطقي النموذجي. وقد أضاف علماء المنطق في العصور الوسطى خَمسَ قواعد أخرى إلى القواعد الأصلية التي وضعها أرسطو.

اتّبع إقليدس في مؤلَّفه الضخم "العناصر" قواعدَ الاستنتاج المنطقي لكي يتوصَّل إلى مئات النظريات الهندسية انطلاقًا مِنْ عَشر فرضيات فقط. كانت هذه الفرضيات مزيجًا مِنَ البديهيات، مثل: (الأشياء التي تتساوى مع شيء واحد، تتساوى مع بعضها)، وبعض المفاهيم المعقولة عن النقاط والخطوط والمستويات الرياضية، مثل: (يمكن رسم خطّ مستقيم بين نقطة وأية نقطة أخرى). يستطيع علماء الرياضيات أنْ يرفضوا بعض فرضيات إقليدس، كما فعَلوا ذلك حقًّا فيما بعد، ولكنْ كما بَيَّنَ أرسطو، لمْ يكن هنالك أي شك في النتائج. كانت نظريات إقليدس كلها مِنْ نوع الحوار الذي يقول: إذا كان... فالنتيجة... وفق قواعد الاستِنتاج المنطقي. إذا آمَن المرءُ بصحة ويقين منطق أرسطو، فيتحتَّم عليه أنْ يؤمِن بأنّ نظريات إقليدس هي نماذج لليقين المنطقي مهما كان رأيه بالفرضيات والمقدمات. على مدَى ألفَي سنة بعد ظهور كِتابَي "المنطق" و"العناصر"، كان علماء الرياضيات والفلاسفة وعلماء الطبيعة، بل وحتى الأدباء والمثقفون يؤمنون بأنّ منطق أرسطو والاستنتاج المنطقي هي وسائل تمكّنهم مِنَ الوصول إلى اليقين في مسائل عديدة. كمثال على ذلك فقد قام القديس اللاهوتي توما الأكويني[9] Thomas Aquinas St. في القَرن الثالث عشر باستخدام

منطق أرسطو في إثبات صحة الأمور الإيمانية والدينية بما فيها وجود الله. وكان لفلسفته التي مَزجَتْ بين المسيحية ومنطق أرسطو تأثير كبير، حتى إنّ البابا ليو الثالث عشر أصدرَ مَنشورًا بابويًّا في 1879 أعلَن فيه أنّ فلسفة توما الأكويني هي الفلسفة الرسمية للكنيسة الكاثوليكية الرومانية.

وهكذا عندما انكبَّ علماءُ الرياضيات في القَرن التاسع عشر على تطبيق قواعد الاستنتاج المنطقي في الحساب والأعداد كما طبَّقه إقليدس في الهندسة، كانوا يفعلون ذلك وهم واثقون مِنْ قوة وصحة الاستنتاج المنطقي. كانت الفكرة العامة هي محاولة تنظيم النتائج الحسابية التي تنوَّعتْ واختلفتْ على مرِّ العصور في قالب منطقي ما. وكان علماء الرياضيات حتى ذلك الوقت قد قَبلوا كثيرًا مِنْ هذه النتائج دون برهان أو إثبات لأنها كانت تبدو بديهية. فمثلًا لمْ يفكّر أحَد جديًّا بالتساؤل عن صحة قانون الأجزاء الثلاثة الذي ينصُّ على أنّ كل عدد يجب أنْ يكون صفرًا أو أكبر مِنَ الصفر (عدد موجب) أو أصغر مِنَ الصفر (عدد سالب). قُبِلَ هذا القانون بثقة ويقين مثل قبولنا فكرة أنّ كلَّ فترةٍ مِنَ الزمن moment إما أنْ تكون جزءًا مِنَ الحاضر أو مِنَ المستقبل أو مِنَ الماضي، ولمْ يفكر أحَد أنّ هذا قد يكون خطأً.

لمْ يكن ذلك خطأً، ولكنْ لمْ يكن لدَى علماء الرياضيات قبل مئة سنة مَضتْ أي برهان على صحة هذا القانون، ولا على كثير مِنَ الحقائق الحسابية الأخرى. وقد حان الوقت للتوصّل إلى اليقين المنطقي في مسائل الحساب بدلًا مِنَ اللامبالاة والتسليم بالقبول التقليدي القديم. تصوّر علماءُ الرياضيات أنّ مهمتهم ستكون سهلة وروتينية، فما عليهم إلا أنْ يتبعوا الطريقة التي اتّبعها إقليدس... ولكنها كانت بدايةَ بَحثٍ شاقّ طويل عن كنز غير موجود.

على الرغم من أنّ بعض علماء الرياضيات قد سبقوا الآخرين على طريق الاستكشاف والبحث، إلا أنّ العالِم الألماني غوتليب فريجيه[10] Gottlob Frege كان مِنْ أوائل الذين أَعلنوا توصّلهم إلى هذه النتيجة بعد أنْ عمل من 1893 إلى 1902 على استِنباط مئات النظريات الحسابية انطلاقًا مِنْ فرضيات قليلة، ووضَع النتائج النهائية في مؤلَّف ضخم مِنْ جزأين تحت عنوان: "القوانين الأساسية في عِلم الحساب Fundamental Laws Of Arithmetics". كانت فرضياته مثل فرضيات إقليدس قابلة للمناقشة والرفض والقبول، ولكنّ استنتاجاته بُنِيَتْ على قواعد الاستنتاج المنطقي حسب منطق أرسطو. وهكذا اعتقد هو ومعاصِروه أنّ كِتابه هذا لن يكون في حُسن براهينه وفي قوة يقينه أقلّ أهمية مِنْ كِتاب "العناصر" لإقليدس، ولمْ يكن لديهم أي سبب للشك في ذلك، حتى سنة 1902 عندما كان فريجيه يضَع اللمسات الأخيرة في مؤلَّفه الضخم. في تلك السنة، نَشَر عالِم الرياضيات الفيلسوف الإنكليزي برتراند رَسل[11] Bertrand Russell أنه اكتشفَ تناقضًا وخطأً منطقيًّا في المَخطوطة الأخيرة للجزء الثاني مِنْ كتاب فريجيه. لمْ يكن التناقض نتيجة إهمال أو خطأ يمكن تصحيحه، بل أظهَر رَسل وجود تناقض في الاستنتاج المنطقي ذاته. لمْ يتصوّر أحَد في ذلك الوقت مدَى خطورة وأهمية هذا الخطأ، ومدَى صعوبة تصحيحه، ولكنه كان كافيًا لكي يدرك

فريجيه أنه قد أهدَر عَشر سنوات مِنَ الجهد والبحث الدَّؤوب...! وكتَب فريجيه في نهاية الجزء الثاني مِنْ كتابه: *"لا يواجِه العالِم شيئًا أسوأ مِنْ أنْ تهتز أُسُس أبحاثه عندما تكون قد شارَفتْ على نهايتها. وقد وجدتُ نفسي في مثل هذا الموقف عندما وصلتني رسالة برتراند رَسل في الوقت الذي انتهتْ فيه طباعة هذا الكتاب".*

تفحّص رَسل بشكل خاص صفات المجموعات وما تضمّه من الأعداد التي استخدَمها فريجيه في وَصفِه لمجموعات الأعداد التي كانت تبدو بديهية بسيطة. حَسب منطق أرسطو، فإنّ المجموعة هي أية فئة من الأشياء التي تَشترك في صفات نوعية متشابهة (مثل مجموعةٍ مِن السيارات أو الطيور أو الأعداد...) أو يمكن القول إنّ المجموعة تُعرَّف وتَتميز بالصفات النوعية المتشابهة والمشتركة بين أفرادها، مثلما يتَميز واحدٌ مِنْ أحياء مدينة ما بنوعية السكان الذين يعيشون فيه. ولكي ينتَمي فردٌ إلى عضوية مجموعة معينة، يجب أنْ يتمتَّع بالصفات النوعية التي يشترك فيها مع أعضاء هذه المجموعة، مهما كان مختلفًا عنهم في صفاته الأخرى.

بينما قَبِلَ علماء الرياضيات في ذلك الوقت هذه البديهيات دون مناقشة، تفحّصها رَسل، كما ذَكر فيما بَعد في كِتابه: "تطوري الفلسفي My Philosophical Development" قائلًا: *"فكَّرتُ أنّ الأشياء قد تكون عضوًا في مجموعتها في بعض الحالات، ولا تكون في حالات أخرى، فمثلًا، إنّ مجموعةً مِنَ الملاعق ليست ملعقة أخرى، ولكنّ مجموعة الأشياء التي "ليست ملعقة" هي في الوقت نفسه ليست ملعقة، وبالتالي تُعتبر مجموعة الأشياء التي ليست ملعقة أحَد الأعضاء في مجموعة الأشياء التي "ليست ملعقة""*[12].

أغلب المجموعات التي نفكر فيها هي مِنْ نوع مجموعة الملاعق، مثل مجموعة الأحذية أو البيوت أو الأقلام... إذ إنَّ كلًّا مِنْ هذه المجموعات ليست عضوًا مِنْ أعضاء مجموعتها ذاتها. ولكن هناك بعض النماذج القليلة التي يمكن أنْ تكون فيها المجموعة عضوًا مِنْ أعضاء أفرادها في الوقت نفسه، فمثلًا: إنّ مجموعة "كلّ الأشياء المَطبوعة على هذه الصفحة" هي في حَدِّ ذاتِها مَطبوعة على هذه الصفحة أيضًا. كما أنّ مجموعةً مِنَ الأفكار هي فكرةٌ في حَدِّ ذاتِها أيضًا. في مثل هذه الحالات، تنطبق شروط العضوية والانتماء إلى المجموعة على كامل المجموعة نفسها، لأننا إذا نظرنا إلى صفات المجموعة كمَوجود واحِد لوَجدناها تتمتَّع بالصفات النوعيَة المتشابهة التي يَشترك فيها أعضاء المجموعة والتي تُحدِّد عضويتهم في هذه المجموعة. ثم تابَع رسل تفكيره في تلك المجموعة الهائلة التي تضمّ كل "المجموعات التي ليست عضوًا من أعضاء ذاتها"، ولنطلق على هذه المجموعة الهائلة اسم "مجموعة اللامنتمين". تضمُّ مجموعةُ اللامنتمين كل المجموعات المألوفة (مثل مجموعة الملاعق والأحذية والسيارات...)، ثم كتبَ قائلًا: "*وسألتُ نفسي هل تُعتبر مجموعة اللامنتمين عضوًا مِنْ أعضاء ذاتها أم لا؟* ".

اكتشف رَسل هذا التناقض أثناء محاولته الإجابة على هذا السؤال. فكّر رَسل بأننا إذا افترَضنا أنّ مجموعة اللامنتمين تَحمل صِفة عدم كَونها عضوًا مِنْ أعضاء مجموعتها، فهي تَنتمي بذلك إلى عضوية مجموعة اللامنتمين، ولكنّ التعريف الأساسي لأعضاء مجموعة اللامنتمين هو ألا يكون أي منهم عضوًا مِنْ أعضاء مجموعته، وهذا يَحرِم مجموعةَ اللامنتمين ككلّ مِنْ حقّ الانتماء إلى مجموعة اللامنتمين...! (وذلك حَسب التعريف كما نَذكر، لأنّ مجموعة اللامنتمين تضمُّ فقط تلك المجموعات التي ليست عضوًا مِنْ أعضاء مجموعتها ذاتها). وعلى العكس من ذلك، إذا افترَضنا أنّ مجموعة اللامنتمين ليست عضوًا مِنْ أعضاء مجموعة اللامنتمين، فهذا يعني أنّ مجموعة اللامنتمين لا تَنتمي إلى ذاتها، وهي ليست عضوًا مِنْ أعضاء مجموعتها ذاتها، ولكنّ التعريف الأساسي لأعضاء مجموعة اللامنتمين يَنطبقُ على المجموعة ككلّ، ويُؤهلها بالتالي لكي تَنتمي وتكونَ عضوًا مِنْ أعضاء مجموعة اللامنتمين! وكتَب رَسل: *"وهكذا يقود كلُّ فرَض إلى نقيضه المنطقي! وقد قطَعتْ هذه المناقشة شَهر العسل الذي كنتُ أتمتع به مع المنطق"*.

أظهَر تناقض رَسل أنّ اتّباع المنطق يمكن أنْ يقودنا إلى نتائج متناقضة. ويقودُنا ذلك مباشرة إلى أنّ منطق أرسطو يجب أنْ يُطَوَّر ويُصلَح لكي نُزيل هذا التناقض، أو أنه يجب أنْ يُستبدَل بطرائق أخرى جديدة للوصول إلى البرهان واليقين في الرياضيات. اختلفَ علماءُ الرياضيات في العقود الثلاثة الأولى مِنْ القَرن العشرين حول طريقة إصلاح الخَلل وتَجاوزه، ولمْ يَعلموا أنّ اكتشافًا آخَر غير متوقَّع سيَجعل كل آرائهم المختلفة في هذا المجال أمورًا هامشية غير مهمة. بين كل المدارس الفكرية التي ظهرتْ في تلك الفترة، ركّزتْ اثنتان منهما بِوَجهٍ خاصّ على إصلاح منطق أرسطو وهما: مدرسة المنطقيين Logicist School ومدرسة الشَّكليين Formalist School، وقد شغلتْ برامجهما علماء الرياضيات كثيرًا في تلك الفترة.

اتَّجَه أصحابُ مدرسة المنطقيين، وعلى رأسهم برتراند رَسل نفسه، إلى حلّ تناقض رَسل بتغيير قواعد الانتماء إلى عضوية المجموعات. أرادوا بشكل خاص ومحدَّد أنْ يلغوا إمكانية انتماء مجموعة ما كعضو في نفسها، ولكي يتمكّنوا مِنْ ذلك، اقترَحوا إضافةَ مبدأ جديد إلى مبادئ منطق أرسطو هو مبدأ الحَلقة المفرَغة Vicious Circle Principle الذي ينصُّ على أنّ ما يشمل كل المجموعة يجب ألا يكون عضوًا مِنْ هذه المجموعة. بتطبيق هذا المبدأ، يصبح التساؤل فيما إذا كانت مجموعة اللامنتمين التي افترَضها رَسل عضوًا في ذات مجموعتها أم لا هو تساؤلٌ يُحَلُّ بصيغة الأمر: كُنْ... فيكون...! وهكذا يُمكن تجنّب الحَلقة المفرَغة في تناقض رَسل.

مقابل مدرسة المنطقيين، اعتقدتْ مدرسة الشكليّين أنّ مَوطِن الضعف الذي أظهَره تناقض رَسل ليس ضعفًا في المنطق نفسه، بل في دلالات الألفاظ اللغوية التي استُخدمتْ في التعبير عن المنطق. وعلى وَجه التحديد، فقد أرجَعوا كثيرًا مِنَ التناقضات المنطقية، بما فيها تناقض رَسل إلى غموض معنى كلمة: "كلّ". فمَثلًا عندما نقول: "لِكلِّ قاعدة شَواذ" فإنّ هذا إما أنْ يكون هَذرًا، أو تَناقضًا، بحسب ما نفهَمه مِنْ كلمة "كل"، وفيما إذا كانت تشمل هذه القاعدة أيضًا أم لا تشملها.

يرجع عدم الوضوح في مثل هذا التعبير إلى دلالات الألفاظ اللغوية وليس إلى المنطق. ويمكن توضيح هذه التعابير بتَخليص المنطق مِن تَلوّنِه بالدلالات المختلفة للألفاظ والكلمات. ولذا، فهم يُعيدون صياغةَ الحِوار المنطقي في الرياضيات برموزٍ محدَّدة دقيقة ليس لها دلالات لفظية أو معنوية، ويتجنَّبون استِخدام الألفاظ والكلمات.

ظهرتْ هذه الطرائق التي اقترحَتْها هاتين المدرستَين وكأنها ستقود علماء الرياضيات مرّة أخرى إلى كنز اليقين، وتابَع كل فريق بَحثه، وشَحذ آماله للوصول إلى ذلك اليقين. ولكن في سنة 1931 تسَمَّر علماء الرياضيات في أماكِنهم جامِدين عندما أعلَنَ عالِم المنطق النمساوي كورت غودل[13] Kurt Godel أنه لا يمكن الوصول إلى اليقين الكامل في الرياضيات وفق أي مَنهج يستند إلى المنطق التقليدي، وإنه لمن السخرية أنّ غودل قد استخدَم المنطق بطريقة ذكية لكي يثبت ضعف المنطق...!

يرتَكز اكتشافُ غودل على أنّ أي إثبات يَعتمِد على المبادئ المتَّبعة في الاستنتاج المنطقي لن يكون كافيًا لكي يُبرهِن على صحة أو خطأ كلّ النظريات الرياضية الممكِنة، تمامًا مثلما لمْ يكن منطق أرسطو كافيًا للإجابة على السؤال في تناقُض رَسل. باختصار، بَيَّن غودل أنه ستظهَر في الرياضيات دائمًا بعض الأسئلة التي لن نستطيع الإجابة عليها باليقين والبرهان المنطقي التقليدي، كما وجَد غودل أنّ كل إصلاحٍ يمكن تخيّله أو الوصول إليه في تطبيق المقياس الناقِص، سيكون ناقصًا أيضًا بالطريقة نفسها. وهذا يعني أنّ اقتراحات المنطقيين والشّكليين ستَبوء بالفشل في النهاية.

أدَّتْ نتائج غودل إلى استنباطِ نماذج منطقية تختلف عن منطق أرسطو. حَسبَ هذه النماذج، أصبح بإمكاننا اعتبار أن كل مقولَة إما أن تكون صحيحةً، أو مغلوطة، أو شيئًا آخَر غيرهما. وأبسَط هذه النماذج هو نظام المنطق الثلاثي الذي يُنظَر فيه إلى تعبيرٍ ما على أنه صحيح أو خاطئ أو محتَمَل، ويرتَكز هذا المنطق على رَفض قانون أرسطو في رَفض الحلّ الوسَط (الذي ينصّ على أنّ التعبير يكون إما صحيحًا أو مغلوطًا ولا يوجَد احتمال ثالث)، وهذا يَسمح لنظريةٍ ما بأنْ تكون إما صحيحة أو مغلوطة أو مُحتمَلة (أي غير مؤكَّدة)، وينسَجم بذلك مع اكتشاف غودل.

لهذا السبب، ولأنّ النماذج المنطقية التي تختلف عن منطق أرسطو تشكِّل مواضيع مهمة ومثيرة في الرياضيات، فإنّ بعض علماء الرياضيات كانوا ولا يزالون حتى اليوم يَقضون كثيرًا من أوقاتهم في دراسَتها وتطويرها. وتَنْصَبُّ جهود علماء آخرين على إيجاد توافق بين الرياضيات وعدم اليقين الذي جاء به غودل. يمثِّل هذا اختلافًا بَيِّنًا عن المحاولات السابقة التي كانت تحاول استعادَة الثقة باليقين الرياضي وإنقاذه مِنْ تناقض رَسل.

بعد نَشرِ نتائج غودل الجريئة، استسلم أغلب علماء الرياضيات إلى القناعة بأنّ الرياضيات لمْ تَعُد حصن اليقين الذي لا ينتابه الشك. كان أحَد هؤلاء عالِم الرياضيات الفيلسوف الهنغاري إيمري لاكاتوس[14] Imre Lakatos الذي وَضَع فلسفةً رياضية استوعَبتْ عدم اليقين الذي جاء به غودل. وصَف لاكاتوس الرياضيات (كما وَصَف العِلْمَ أستاذه كارل بوبر[15] Karl Popper) بأنها في حالة متغيرة دائمًا، وأنها مُعرَّضَة للمراجَعة بشكل جَذري أحيانًا وفق ما يَجدُّ مِنْ اكتشافات. كتَب

لاكاتوس: *"لا تنمو الرياضيات بشكل إضافاتٍ مستمرة متزايدة في عدد النظريات المثْبَتة، ولكنها تنمو وتتغير بالتَّحسُّن المتواصِل في الحَدس والتنبؤات والانتقادات الذكية"*.

في سنة 1981، شرحَ المؤرخ موريس كلاين Morris Kline هذه الفكرة في كتابه "الرياضيات: فقدان اليقين The Loss of Certainty" حيث شَبَّه عالِمَ الرياضيات بالمكتشِف أو بالمهاجِر *"الذي يرتّب قطعة مِنَ الأرض لمَسكَنِه، ولكنه يدرك وجود الحيوانات المفترسة في الغابة مِنْ حوله. ولكي يزيد شعوره بالأمن والاطمئنان، فإنه يرتّب وينظّف أجزاء أكبر وأكبر مِنَ الأرض حول المَسكَن، ولكنه لن يَشعر أبدًا بالأمن الكامل والاطمئنان المطلق، فالوحوش قابِعة حوله دائمًا، وذات يوم ستفاجئه وتفترسه"*. وأضاف كلاين إنّ عالِم الرياضيات يَستخدم المنطق لكي يرتِّب ويشذِّب المناطق التي يكتنفها الغموض وعدم الوضوح في الرياضيات، ولكنه يجب أنْ يتوقَّع دائمًا ظهور أو اكتشاف بعض النواقص والمغالطات المنطقية، وإنّ هذه النواقص أو المغالطات هي كالوحوش التي ستُحطِّم آماله في الوصول إلى البرهان الكامل الذي لا يَشوبه الشك.

لا تَنسَجم نفسيةُ عالِم الرياضيات بسهولة مع الاستسلام التام لعدم اليقين الذي جاء به غودل، وربما يَرجِع ذلك إلى أنّ علماء الرياضيات لا يستطيعون الانسجام مع عدم اليقين، ويستمرون في أعمالهم اليومية وكأن أحداث هذا القَرن لم تكن! أو ربما كان السبب كما قال كلاين: *"إنهم من الصعب أنْ يصدّقوا حدوث شيء هام يؤثّر على نشاطاتهم وأعمالهم في الرياضيات"*، ويتصرَّف كل عالِم مِنْ علماء الرياضيات وكأن عدم اليقين الذي طرحَه غودل إنما يؤثِّر على الآخرين ولا يؤثِّر عليه هو! ومهما كان السبب، فإنّ علماء الرياضيات هذه الأيام *"يكتبون وينشرون أبحاثهم وكأنّ عدم اليقين غير موجود"* كما ذكَر كلاين. ومِنَ الناحية العملية ما زال علماء الرياضيات يؤمنون بالرياضيات، مثلما كانت قبل غودل، على أنها كما قال الألماني دافيد هيلبرت[16] David Hilbert: *"كل مسألة رياضية محدَّدة يجب أنْ تكون قابلة للحلّ بشكل محدَّد إما بالإجابة على السؤال المطروح أو بالبرهان الواضح على أنها غير قابلة للحلّ"*.

هذا التمسّك الشديد والإيمان العميق بفكرةٍ ثبتَ بُطلانها هو الذي يوضح الجانب الإنساني من الرياضيات، وهو لا يتَّفِقُ مع الصورة التي يحملها عامّة الناس عن علماء الرياضيات، ولكنه يتَّفِقُ تمامًا مع الطبيعة الإنسانية. عندما يتصرَّف علماءُ الرياضيات المعاصِرون وكأن اليقين موجود، أو يمكن التوصل إليه دائمًا في الرياضيات، فإنهم لا يختلفون في ذلك عن كثير مِنَ المخترعين الذين يؤمنون بإمكانية تصميم آلَة الحركة الدائمة على الرغم من أن كل الدلائل والبراهين تنفي إمكانية ذلك، وبالتالي فإن إيمانهم هذا يجعلهم منسَجمين مع طبيعة التطور الإنساني الذي يَدفع كل جيل جديد إلى تحقيق ما كانت تعتبره الأجيال السابقة مستحيلًا. كتَب هيلبرت سنة

1900: *"الإيمان دافعٌ قوي إذ إننا نصغي إلى الصوت الذي يهتف في أعماقنا دائمًا: ها هي مسألةٌ جديدة فابحَث عن الحلّ، وسيمكنكَ أنْ تجده بالمنطق السليم، لأنه لا يوجَد في الرياضيات (لن نعلم)".*

كتَب برتراند رَسل سنة 1959 بحزن وأسى: *"كنتُ أتوقُ إلى الإيمان الديني، وتصورتُ أنّ اليقين يمكن أنْ يوجَد في الرياضيات أكثر مِنْ أي مجال آخر... ولكن بعد حوالي عشرين سنة مِنَ الكدح الشاق، اقتنعتُ بأنني لا أستطيع أنْ أفعَل أكثر مما فَعلتُ في محاولاتي لجعل المعرفة في الرياضيات معرفةً يقينية لا يَرقَى إليها الشك".*

لا شك بأن هناك كثير مِنْ علماء الرياضيات مثل رَسل، وسيأتي بعدهم آخرون ممّن سيقضون عشرات السنين مِنْ حياتهم في البحث عن كنز اليقين. وطالما أنّ الأمر سيكون كذلك، فلربما استطاع أحدهم أنْ يكتشفه، وأنْ يُسلِّمَ إلى الأجيال القادمة ما لمْ يستطع السابقون مِنْ علماء الرياضيات الوصول إليه: البرهان اليقيني الذي لا يَرقَى إليه الشك.

تحديد نقطة التَّلاشي:

النهاية والحساب

"الإرادة لانهائية... والقدرة محدودة

الأمل بلا حدود... والعمل عبدٌ للحدود والقيود".

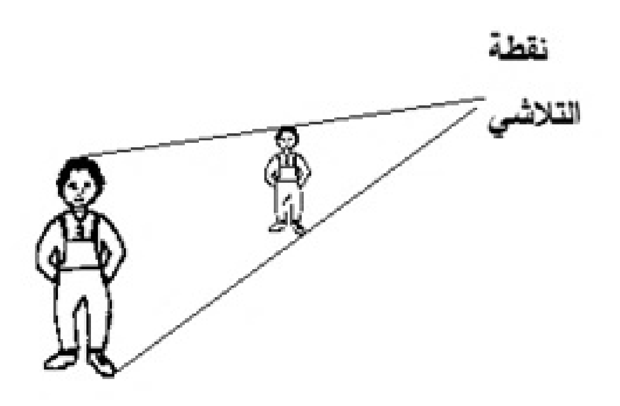
شكسبير Shakespeare

من كتاب "ترويليوس وكريسيدا Troilus and Cressida"

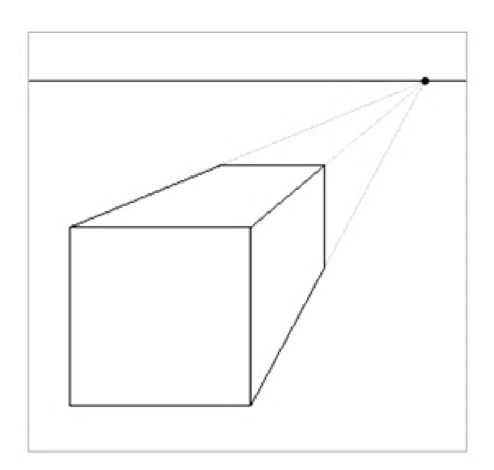
نحن مخلوقات طَموحة تدفعنا قوة داخلية خفية في طبيعتنا تجعلنا نطمَح دائمًا إلى التفوق على أنفسنا. ربما كان ذلك تعبيرًا عن الاتجاه العام الذي وصَفه داروين عندما كتَب: *"بينما يعمل الاصطفاء الطبيعي لصالح بقاء كل مخلوق، فإنّ كل الصفات الجسدية والعقلية تتجه نحو الكمال"*. وربما كانت تلك القوة الخفية موهبة فريدة يتميز بها العقل البشري *"الذي لا يمكن أنْ يكون قَدَرُهُ سوى ممارسة التَّخيل والتَّصور والاختراع والكَمال"* كما اقترح الفيلسوف الفرنسي روبينيه J.B. Robinet. وعلى كل الأحوال، يبدو أنّ ما نَصْبو إليه وما نتَّجه نحوه مِنَ الكمال هو هدفٌ لا يمكن الوصول إليه، أو على الأقل إنه لمن غير المحتمل أننا سنصل إلى الكمال ذات يوم، أو أننا سندرك ذلك ونعرفه، وبالتالي نكفُّ عن العمل والطموح. يبدو أنّ الكمال في نفوسنا أمرٌ يشبه نقطة التَّلاشي في لوحَة رَسم... نقطةٌ وهمية في اللانهاية تتَّجه إليها كل الخطوط الرئيسية. بل إنّ الكمال الذي نَصْبو إليه يشبه بشكل أدقّ ما يسميه علماء الرياضيات بالحَدّ المُقارَب Asymptotic limit، وهو النهاية أو الهدَف الذي يمكن تحديده ويمكن الاقتراب منه بشكل مستمر دون أنْ نتمكَّن مِن الوصول إليه أبدًا. يُعتبر مفهوم "الحَدّ المُقارَب"، أو "التَّناهي"، مبدأً مهمًّا في الرياضيات، وهو مبدأ ما زلتُ أعتبره فكرةً باهرةً أستَصعبُ تصوّرها وإدراكها على الرغم من مرور السنين على عملي في هذا المجال، ومعايشتي لهذه الفكرة مرات ومرات، والحقيقة أن عليّ أن ألا أستَغرب وأندَهش للصعوبة التي واجَهتني، لأنّ مبدأ الحَدّ المُقارَب يرتبط ارتباطًا وثيقًا بلغزٍ صعب عنيد آخَر هو مفهوم "اللانهاية".

لعل هذا الأمر يبدو واضحًا بشكل خاص في الهندسة، حيث يمكننا أن نُعَبّر عن مَبدإ الحَدّ المُقارَب بأنه خطّ محيطي طويل لانهائيّ يسمى الخَطّ المُقارَب، وحسب التعريف فإنّ كل خطٍّ آخَر

يمكنه أنْ يقترب مِن الخطّ المُقارَب أكثر فأكثر، ولكن لا يمكنه الالتقاء به، أو التقاطع معه أبدًا، وكأنه طائرة تقترب تدريجيًّا مِن مَدرج مَطار دون أنْ تمسَّه وتهبط عليه فعلًا. ولطالما تمنَّيتُ لو حدَث ذلك، وأنّ خطًّا سيقطع تلك المسافة الصغيرة الأخيرة بينه وبين الخطّ المُقارَب، ولكن ذلك لن يَحدث، فكلما اقتربَ خطٌّ مِن الخطِّ المُقارَب، فإنّ المسافة بينهما تنقسم إلى النصف دائمًا، ولكن لا يمكن لأي خطٍّ أنْ يصِل إلى نقطةٍ يختفي عندها النصف المتَبقي كليًّا لأنه سيظهر بعده مسافة تنقسم هي الأخرى ويبقى نصفها الثاني... وذلك حتى اللانهاية...!



[المترجم: شكل توضيحي يبين تطبيق مبدأ نقطة التَّلاشي في الرَّسم].



[المترجم: شكل توضيحي يبين تطبيق مبدأ نقطة التَّلاشي في الرَّسم الهندسي].

هذا بالضبط هو ما أجِده صَعبَ التَّصور في الحدود والخطوط المُقارَبة. عندما يُناقِش علماء الرياضيات هذا الموضوع، فإنهم يُخبروننا عما تَتَّصِف به بعض الأشياء في اللانهاية، وأنا أعتَرفُ أنّ هذا ليس عمَلًا خارقًا، لأنّ الحدود المُقارَبة لبعض الأشياء يمكن معرفتها بسهولة. تَخيَّل مثلًا شَكلًا كثيرَ الأضلاع والزوايا داخل دائرة، ثم تَخيَّل أننا أخَذنا نزيد عددَ أضلاعِه بشكلٍ مطَّرد ومنتظَم. على الرغم من أنّ هذه هي عملية لا تنتهي، ولكن سيكون من الواضح بعد قليل أنّ هذا

الشّكل المُضلّع سيتَناهى في شَكلِه إلى الدائرة، التي تمثِّل حَدّه المُقارَب، أو النهاية التي يتَّجه إليها. وبالمِثل، يتَّضِح أنّ الحَدّ المُقارَب أو النهاية لِمتتالية الأعداد: 0.9، 0.99، 0.999، 0.9999 هو ببساطة العدد واحد. لَن تَصل هذه المتتالية بالفعل إلى العدد واحِد أبدًا، ولكنها ستستمر دائمًا بالاقتراب أكثَر فأكثَر مِنَ العدد واحد.

يصعب في أغلب الأحيان تصوُّر أو وَصف الأمور في اللانهاية، ولكن حتى في مثل تلك النماذج، اكتشفَ علماءُ الرياضيات طرائق لمعرفة الحَدّ المُقارَب، أو نهاية هذا التقارب اللانهائي. تَرتكِز أغلب هذه الطرائق على جَمعِ سَلاسل لامتناهية مِنَ الأعداد... وهذا أمرٌ يبدو مستحيلًا للوهلة الأولى، ولكنّ علماء الرياضيات تَمكَّنوا مِنْ استخدامِه ببراعَة في الثلاثمئة سنة التي مضتْ. باستِخدام هذه الأساليب البارعة، استطاعوا أنْ يكتشفوا مثلًا أنّ حاصِل جَمع: 1 + 2/1 + 4/1 + 8/1 + 16/1 + 32/1... إلى ما لانهاية سيصل إلى العدد 2... وأُنبِّهُ هنا إلى أن الحَدّ المُقارَب لن يكون 2 تقريبًا، وإنما 2 على وَجه الدِّقة والتَّحديد...!

تفيد هذه المهارات كثيرًا في معرفة الحدود المُقارَبة، لأنها بالتعريف نتيجة التتالي المستمر إلى اللانهاية. فمثلًا تَصوَّرْ مُضلَّعًا ثلاثي الأضلاع (مثلث) مَرسومًا داخل دائرة قطرها بوصَة واحدة، ثم تَصوَّرْ دائرة مَرسومة داخل هذا المثلث، ثم مُربَّعًا داخل هذه الدائرة، ثم دائرة أخرى داخل المُربَّع... وهكذا تَصور الاستمرار في هذه العملية إلى ما لانهاية وأنتَ ترسم دائمًا داخل كل دائرة مُضلَّعًا آخَر يزيد عدد أضلاعه ضلعًا واحدًا عن المُضلَّع الذي سبَقه وهكذا... لا شك بأنّ الأشكال المرسومة ستَصغر شيئًا فشيئًا كلما تابَعنا الرَّسم وفقَ هذه الطريقة، ويمكنكَ التنبؤ أنّ نهاية هذه العملية الطويلة ستكون نقطة تقَع في مَركز كلِّ الدوائر والمُضلَّعات، ولكن هذا ليس صحيحًا...! تذكّر أنّ المُضلَّع الذي تتزايد أضلاعه باستمرار، سيتَناهى إلى شكلِ دائرة، وهذا يعني أنّ العملية ستَستقرّ وتنتهي إلى رَسم دائرة فوق دائرة، وهذا يعني على وَجهِ التحديد أنك ستصِل إلى مرحلة تزول عندها الفروق بين الدوائر والمُضلَّعات، وستكون نهاية هذه العملية أنّ الأشكال المتداخِلة ستتَناهى إلى دائرة صغيرة في مركز الدائرة الأولى. يستطيع علماء الرياضيات بأساليبهم الماهرة في التعامل مع المتتاليات اللانهائية أنْ يحسبوا قِطر هذه الدائرة الحَدّية، وأنه سيكون تقريبًا 12/1 مِنَ البوصة.

بطرائق مشابهة، يمكننا التنبؤ بدقة ما هي حالة الكمال التي يزداد اقتراب البشر منها باستمرار في كثير من جوانب حياتهم دون أن يتمكَّنوا من الوصول إليها بشكل نهائي، ولنأخذ مثالًا بسيطًا على ذلك وهو: كم يبلغ الزمن القياسي في سباق جَري المِيل الواحد؟؟ هذا الزمن الكَمالي يتقارب إليه الإنسان باستمرار دون أنْ يصل إليه أبدًا.

لعل أهم وأخطر ما أنتَجته مَهارة علماء الرياضيات في تعاملهم مع الحدود المُقارَبة هي النظريات المدهِشة في حساب التفاضل والتكامل[17] Differential Calculus الذي اختَرعَه إسحاق نيوتن[18] Isaac Newton وغوتفريد لايبنيتز[19] Gottfried Leibnitz في القَرن السابع عشر. تفيد هذه النظرية في وَصف التغيرات المستمرة مِنْ أي نوع كان بدقّة تامة وتفصيل كامل. ونعني بالدِّقة والتفصيل أنه عن طريق حساب التفاضل والتكامل يمكن تحديد كل لحظة مِنْ لحظات

التغير في عملية متغيرة باستمرار. وقد استخدَم علماءُ الفضاء حسابَ التفاضل والتكامل في تحديد مواقع الأقمار الصناعية لحظَة بلحظَة، واستخدَمه علماء الاقتصاد في مراقبة تغيرات السّوق في كل فترة.

قبل القَرن السابع عشر، اكتفى علماءُ الرياضيات وعلماء الطبيعة في وصفهم للتغيرات بحساب المعدَّلات والمتوسطات للقياسات المسجَّلة خلال فترة محدَّدة مِنَ الزمن، وعادة ما تكون هذه الحسابات والنتائج بعيدة عن الحقيقة. لِنَفرض مثلًا أنكَ تريد معرفة نمَط هطول الأمطار على مرِّ السنة في أكثر المناطق غزارة بهطول المطر في الولايات المتحدة، وهي منطقة جبل واياليك Mt. Waialeake في هاواي. تَذكُر جداول المناخ أنّ المطر يهطل هناك بمُعدَّل 486.1 بوصة كل سنة، لكن المُعدَّل السنوي بمفرده لا يخبرك عن أي شيء واضح أو محدَّد عن النمط الحقيقي لهطول الأمطار وما فيه مِنْ تقلبات وتغيرات جوية قصيرة أو طويلة المدى على مرِّ السنة، يتَّضح لك الأمر إذا عرفتَ كمية هطول المطر كل يوم، أو بشكل أفضل كل ساعة، أو حتى كل دقيقة، أو كل ثانية، وبشكل مثالي كامل ستَستطيع الإحاطة بكل ما تحتاج إليه من معلومات عن نمَط هطول الأمطار في تلك المنطقة إذا عرفتَ كمية هطول المطر مِنْ لحظة إلى أخرى... يمدُّكَ حسابُ التفاضل والتكامل بالوسائل اللازمة لمعرفة ذلك.

استندَ اكتشافُ حساب التفاضل والتكامل على الانتباه إلى أنّ المُعدَّل اللحظي هو الحَدّ المُقارَب التي تتَّجه إليها المُعدّلات التي تَتناقَص فيها الفترات الزمنية بشكل مطَّرد ومنتظم. عَرِف علماء الرياضيات هذا المبدأ قبل أنْ يتمكَّنوا من حساب النهايات بوقت طويل. فمثلًا كان باستطاعتهم حساب أجر العامل في الساعة بتقسيم راتبه الأسبوعي على عدد ساعات عمله في الأسبوع، ويمكنهم الاستمرار على هذا المنوال إلى ما لانهاية وهم يَحسبون سلسلة مِنَ المُعدّلات التي تتوالى في تناقص مطَّرد للفترة الزمنية، ولكنهم لمْ يعرفوا كيفية حساب الحَدِّ الُمقارَب أو النهاية التي يتَّجه إليها هذا التتالي المطَّرد. يمكننا أنْ نَعرف بالبداهة أنّ الحَدَّ المُقارَب أو النهاية التي يتَّجه إليها هذا التتالي المطَّرد، وهذه المتتاليات من المُعدّلات، هو بكلِّ بَساطة الراتب الأسبوعي مَقسومًا على عدد الفترات الزمنية اللامتناهية في الصغر والتي يعملها العامل في الأسبوع، ولكنَّ عددَ هذه الفترات الزمنية هو لانهائي، وحاصِل تقسيم أي عددٍ على لانهاية هو الصفر، وهذه نتيجة لا معنى لها، لأنها تعني أنّ عاملًا يَحصل على 200 دولار مثلًا في الأسبوع، يجمع ذلك بتحصيل "لا شيء" في كل لحظة مِنْ لحظات عمله...! قبل اكتشاف حساب التفاضل والتكامل، وقبل فَهم المتواليات والسلاسل اللانهائية، لم يكن أمام علماء الرياضيات أية قدرة على حلِّ هذا التناقض، ولم تكن قدرتهم أفضل من قدرة الناس العاديين على حساب النهاية التي تتَّجه إليها المضلَّعات والدوائر المتداخِلة إلى ما لانهاية، ولكن عندما توصَّلوا إلى حساب التفاضل والتكامل، صارتْ لديهم الوسائل التي تمكنهم مِنْ تحديد الحدّ المُقارَب أو النهاية التي تتَّجه إليها مُعَدَّلات التغير في كل لحظة، وبالتالي تمكِّنهم مِنْ وصف نمط التغير بدقّة كاملة.

تُذَكِّرني قدرة علماء الرياضيات في التوصل إلى الدِّقة التامة ببطاقةٍ بريدية استلمتُها ذات يوم. صَوَّرتْ تلك البطاقة سكّةً حديدية طويلة حولها رجالٌ صِغار يتفحَّصونها وينظرون بمكبِّراتهم

إلى نقطة بعيدة في الأفق، حيث يبدو طرَفا السّكة الحديدية متقاربان ومتلاقيان. كُتِب تحت الصورة: "تعيين نقطة التَّلاشي". يبدو أنّ علماء الرياضيات يستطيعون تعيين نقطة التَّلاشي فِعلًا بفَضل مهاراتهم وقدرتهم على حساب النهايات. إذا لَمْ تكن لدينا هذه القدرة وهذه المهارة، فستظَّل هذه الغايات بعيدة عن متناولنا، مثل الجبال البعيدة التي تبدو وكأنها رابِضة دائمًا في الأفق البعيد مهما اقتَربنا منها.

هل يمكننا أنْ نتصور الآن ما الذي يمكن أنْ يحدُث لو استطعنا تحديد النهايات التي تتَّجه إليها جهودنا الاجتماعية والفردية بدقَّة كاملة، مثلما نستطيع الآن حساب المعدَّلات اللحظية وكل الحدود المقاربة والنهايات في الرياضيات؟ لا يمكننا تصوّر ذلك... لأن أكبَر المصاعب التي تواجِه تطوّرَنا وتقدّمَنا في مثل هذه الجهود غير الرياضية هي أنّ الجهود الفردية والاجتماعية لا تَتبع تسلسلًا أو نمَطًا منطقيًّا محددًا كما هو الحال في النماذج الرياضية، وحتى لو سلَّمنا بأن لدَى كلٍّ مِنَّا فكرة واضحة عن معنى التقدم والكمال، فمِن غير المحتمل أنْ تَندمِج أفكارنا وتتَّحد باتجاه نهاية واحدة ونحو هدف واحد، ولذلك فلا يمكن تشبيه اتجاهاتنا العفوية الطبيعية بالخطوط المستقيمة المتَّجهة نحو نقطة متلاشية واحدة، بل هي في الواقع خطوطٌ متعرِّجة، وكثير منها غير محدَّد الاتجاه، وغير واضِح الهدف، ويبدو أنّ نقطة التَّلاشي لنشاطاتنا الاجتماعية ليست نقطة محدَّدة، وإنما هي بقعة كبيرة واسعة.



[المترجم: تبدو خطوط القطار المتوازية وكأنها تلتقي في الأفق عند نقطة التَّلاشي].

هناك نماذج خارج مجال الرياضيات تبدو فيها النهايات واضحة ومحدَّدة مثل وضوح السلاسل العددية، وذلك مِثل تتالي الأعداد في السلسلة 0.9، 0.99، 0.999. وتلك هي النماذج التي تتضمَّن نمَطًا مُقَدَّرًا يتَّجِه فيه كلُّ الأفراد نحو هدف واحد، ويسير تطورهم الجماعي بشكل منتظم ثابت كانتظام سلسلة متوالية مِنَ الأعداد. يَنطبِقُ هذا على أغلب المنافسات في المباريات الرياضية، فمثلًا في سباق جَري المِيل، يمكن توقُّع وجود زمن محدَّد يقطَع فيه الإنسان مسافة المِيل الواحد بأقصى سرعة ممكنة.

منذ سنوات عديدة، ظنَّ أغلبُنا أنّ الحَدَّ المُقارَب، أو النهاية المتوقعة لسباق جَري المِيل هي أربع دقائق، وكان المعتقَد السائد هو أنّ أحدًا لن يستطيع جَري هذه المسافة في أربع دقائق. كان ذلك قبل سنة 1954 عندما استطاعَ العدّاءُ الإنكليزي روجر بانيستر Roger Bannister تسجيل أول رقم عالمي لِجَري مسافة المِيل في أقلّ مِن أربع دقائق، وكان رقمه القياسي هو ثلاث دقائق و4,59 ثانية. ظنَّ الناسُ بعد ذلك أنّ أحدًا لن يستطيع جَري مسافة المِيل في أقلّ مِن ثلاث دقائق وخمس وخمسين ثانية، ولكن في سنة 1958 استطاع الأسترالي هيرب إليوت Herb Elliot أنْ يقطَع مسافة المِيل في ثلاث دقائق و4,54 ثانية. وعندما رَتَّبْتُ الأرقام القياسية العالمية لِجَري المِيل الواحد منذ 1865 وجَدتُ أنّ مُعدّلَ التحسن هذه الأيام يساوي تقريبًا ما كان عليه خلال الأربعين سنة التي مَضتْ، ولا يبدو أنّ الأرقام القياسية لجَري الميل قد استقرتْ وتقاربتْ باتجاه نهاية مُحدَّدة واضحة. سَجّل الإنكليزي سيباستيان كو Sebastian Coe سنة 1981 رقمًا قياسيًّا جديدًا في جَري المِيل بزمن قدره ثلاث دقائق و33,47 ثانية... وهو زمنٌ أقلّ بكثير مِنْ حاجز الدقائق الأربع. إذا لم نكن مستعدين لقبول أنّ أحدًا سيُسجل ذات يوم في جَري المِيل رقمًا قياسيًّا مطلقًا لا يمكن تحطيمه، فعلينا افتراض أنّ الحَدَّ النهائي لِتَحسُّننا وتطوّرنا في جَري المِيل هو حَدٌّ مُقارَبٌ تتَناهى إليه الأرقام القياسية وتقتربُ منه باستمرار دون أنْ تَصِل إليه فِعلًا. وهذا يَطرحُ علينا السؤال عن طبيعة القوة أو المقاومة التي تمنعنا مِنَ الوصول إلى الحَدّ النهائي المطلق، ولكنها تَسمح لنا بالاقتراب منه أكثر فأكثر. ونفتَرض أنَّ منشأ هذه المقاومة يتعلق بطريقة ما بالطاقة الحقيقية وبحدود القوة التي يملكها الجسم البشري.

لكي تتَّضح لنا هذه الفكرة، لنتخيَّل أنّ الحَدَّ المُقارَب النهائي المطلوب ليس إلا حاجز سرعة الضوء (يقطَع المتسابق الذي يَجري بسرعةِ الضوء مسافة الميل الواحد في 5,37 جزء مِنْ مليون مِنَ الثانية). في هذه الحالة فإنّ آلية المقاومة تفسرها النظرية الخاصة في النسبية التي وضعها أينشتاين[20] Einstein. حَسب هذه النظرية عندما تصل سرعة أي جسم مادي إلى 10/9 مِنْ سرعة الضوء فإنه سَيحتاج إلى طاقة هائلة لكي يزيد سرعته جزءًا صغيرًا آخر.

والتفسير الفيزيائي لذلك هو أنه عندما تَقترب سرعة جسم مادي مِنْ سرعة الضوء تَتحول أجزاء أكبر وأكبر مِنَ الطاقة اللازمة لتحريكِه إلى كتلة تزيد صعوبة تحريكه. ولذا، يحتاج هذا الجسم إلى طاقة أكبر وأكبر لكي يزيد سرعته، ويستمر تحوُّل الزيادة في طاقة الحركة إلى زيادة في الكتلة وهكذا... ولا يعلم أحَد لماذا وكيف يَحدث هذا، ولكننا متأكدين مِنْ حدوثه (لوحِظ أنّ الإلكترونات تتحرك في المُسَرّعات النووية بسرعة تصل إلى 0.999 مِنْ سرعة الضوء، وقد سجلَ الفيزيائيون هذه الإلكترونات وهي تزداد كَسَلًا وبَلادَة وكأنما زادَت كتلتها زيادة هائلة كما توقَّعتْ النظرية). يشكِّل هذا التزايد المُطَّرد في كتلة الأجسام المادية المتسارعة جدًّا، بالإضافة إلى النقص المُطَّرد في قدرتها على زيادة تسارعها، عائقًا فيزيائيًّا مِنَ المستحيل اختراقه وتجاوزه، ولا يستطيع أي جسم مادي أنْ يصِل إلى سرعة الضوء، رغم أنه قد يقترب منها ببَذل جهد خارق، وصَرف طاقة هائلة.

مِنَ الناحية النظرية عندما يصل الجسم المادي إلى الحدّ المُقارَب النهائي (وهو سرعة الضوء) تصبح كتلته لانهائية، وتَتحول كلّ طاقةِ اندفاعِه إلى زيادة في كتلتِه. ومِنَ الواضح أنه حتى في الظروف المناسبة للجَري (كَغياب مقاومة الهواء مثلًا)، فإنّ الجسم البشري لا يملك في حَدِّ ذاته القدرة والطاقة التي تمكِّنه مِنَ الجَري بسرعة يظهَر فيها تأثير هذه القوانين النسبية، ولا يملك جسم الإنسان القوة التي تمكِّنه مِنَ الصمود في هذه السرعات العالية. يَستهلكُ أحدُنا عادة عدة آلاف من الحريرات كل يوم، ويحتاج إلى ما يعادل 6000 حريرة لكي ينطلق بسرعة 60 ميلًا في الساعة، ومِنَ المؤكد أنه إذا كان هناك حَدٌّ نهائي لسرعة جَرينا في سباق المِيل، أو في أي سباق آخر، فإنّ هذا الحَدّ المُقارَب النهائي يقعُ بعيدًا جِدًّا عن سرعة الضوء، ولكنه مُغلَّف بآلية مقاوَمة تشبه في غرابَتها حَدَّ سرعة الضوء. لعل أضمَن طريقة لمَعرفة هذا الحَدّ النهائي هو الانتظار حتى يبدأ تتابع الأرقام القياسية بالاستقرار، وهذا لم يَحدث بَعد. ولكن عندما يَحدث ذلك سنَعرفه، لأنّ تحطيم الأرقام القياسية الجديدة سيُصبح أصعَب فأصعَب، وسيكون التَّحسُّن في هذه الأرقام القياسية أصغَر فأصغَر. عند ذلك سيُصبح الرقم القياسي النهائي الذي يتَّجه إليه العداؤون أكثر وضوحًا. وبدون معرفة هذا الحَدّ النهائي، سنتصرّف كما نتصرّف الآن وكأنما ليس هناك أي حاجز أو حَدّ نهائي أمام تحطيم الرقم القياسي في جَري الميل. وهذا بالضبط ما يتوقعه المرء في تصرفاتِ نوعٍ يَتْبَع تطوره نمطَ التقدم نحو حَدٍّ مُقارَب، ويتَنَاهى نحو هدفٍ وغاية. لعل أهم صِفة متناقِضة مِنْ صفات الاقتراب مِنْ حَدِّ النهاية هو أنّ المستقبل سيكون سلسلةً لانهائية مِنَ التَّحسن والتقدم، ويبدو أنه كلما وَصلنا إلى أفق سَيظهَر أفقٌ آخر، ولن يُفسِد هذا الوهم إلا المعرفة المؤكَّدَة بالنهاية والغاية بشكل محدَّد ودقيق، ولكن هذا لن يتحقَّق، ولن يكون سببًا لإثارة القلق... ففي هذه اللحظة مِنْ تاريخنا نحن بعيدون جِدًّا عن التوصُّل إلى وسائل وطرائق، مثل حساب التفاضل والتكامل، تمكِّننا مِنْ تحديد وتعيين نقاط التَّلاشي التي يتَّجِه إليها تقدّم الإنسان.

التفكير اللامعقول:

الاستمرار والأعداد

"ذلك العالَم المثالي الواسع الذي خلقه الله لن يُكشف عنه تمامًا عبر العصور اللانهائية".

مارك آكنسايد Mark Akenside من كتاب "متعة الخيال Pleasure of Immagination"

يبدو أنّ العالَم كله يتَّجه إلى الأرقام. هناك التسجيل الصوتي بالأرقام، والتصوير بالأرقام، والكومبيوتر الذي يعمل بالأرقام، والساعات التي تعطي الوقت بالأرقام... وإنني أجِد في هذا المثال الأخير اهتمامًا خاصًّا بالنظر إلى التساؤل القديم عن الزمن، وهل يمرّ الزمن باستمرار؟ أم أنه يمرّ في فترات متقطعة ودقات منفصِلة نسمي كل واحدة منها واحدة الزمن Chronon؟ توحي لنا الساعات الرقمية التي نشاهدها هذه الأيام بتقطُّع الزمن، ولكننا لَسنا في الواقع أقرب إلى حلِّ السؤال الآن مما كان عليه الإغريقيون عندما كانت موضة عصرهم في قياس الزمن هي الساعة المائية التي توحي بالمرور المستمر للزمن...! بل إنّ السؤال يبدو أكثر صعوبة في هذه الأيام مما مضى، فبينما كان علماء الفيزياء يبحثون فيما إذا كان الزمن مستمرًّا أم لا، كان زملاؤهم مِنْ علماء الرياضيات قد غيَّروا تعريف الاستمرار مِنْ تعريف عِلمي معقول إلى تعريف يبدو غير متَّزن علميًّا...! والآن الزمن وحدَه هو الكَفيل بإخبارنا فيما إذا كان علماء الرياضيات سيظَلون متمسِّكين بإحساسهم الرياضي الأصلي عن استمرار الزمن، أم أنهم سيَقبلون بالتعريف المُعَدَّل في دراستهم لمشكلة الزمن.

لعل أهم الأسباب التي تثير عدم الارتياح لدَى الفيزيائيين فيما يقوله علماء الرياضيات عن مسألة الزمن هو أنّ التعبير الرقمي عن الاستمرار هو خطٌّ مِنَ الأعداد. وهو خطٌّ عادي يرتِّبُ عليه علماء الرياضيات الأعداد المعروفة في عِلم الحساب. هذا هو المقياس النظري أو المسطرة التي يستعملها علماء الرياضيات في قياس الكميات المستمرة. وفي هذا السياق، يُعبَّر عن الإحساس بالاستمرار بخطٍ مِنَ الأعداد يُميِّزُ كلَّ نقطة فيه عددٌ، بحيث لا يوجَد بين النقاط أية فجوة أو فراغ ليست مميَّزة بعدَد.

أبسَط متتالية مِنَ الأعداد الصحيحة Whole Numbers هي 1، 2، 3، 4، 5... عندما تُرتَّبُ هذه الأعداد في مسافات متساوية منتظمة فإنها تَترك بينها فجوات واضحة. اكتَشفَ الإغريقيون أول سلسلة مستمرة مِنَ الأعداد، قُسمتْ الفجواتُ بين الأعداد الصحيحة في تلك السِّلسلة إلى أجزاء لامتناهية بحيث تبدو أنها لا تَترك أية فجوة أو فراغ دون أنْ يميَّز بعدَد. سَمَّى الإغريقُ هذه السلسلة: سلسلة الأعداد الكَسْرية العادية Rational Numbers حيث تُشكِّل الأعدادُ الصحيحة والأجزاء التي تقَع بينها مَعًا مجموعةَ الأعداد الكَسرية العادية، وهي الأعداد التي يمكن التعبير عنها بشكل نِسَب أو كُسور مِنَ الأعداد الصحيحة مثل: 2/3، 7/2، 1/5...

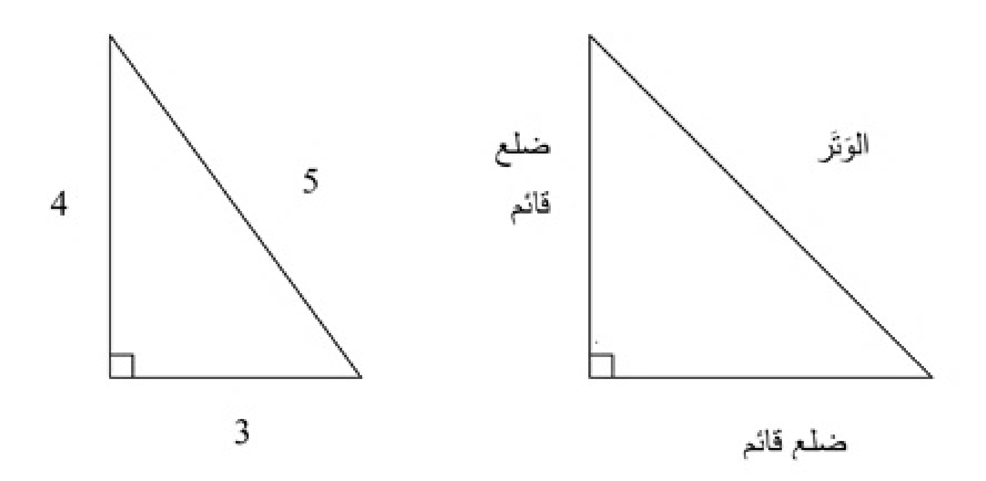
كان فيثاغورس[21] Pythagoras أحَد أولئك الإغريق الذين آمَنوا رياضيًّا، بل ودينيًّا، أنّ سِلسلة الأعداد الكَسرية العادية تمثِّل النموذج الكامل للاستمرار، وكان أحَدَ أعضاء جَماعة سرّية آمَنت بقُدسية الاستمرار، وخاصة بالأعداد التي تعبِّر عن هذه القُدسية. أضفَى فيثاغورس وأصحابه أهمية كبيرة على هذا الاكتشاف الإغريقي الذي بَيَّن أنّ السّلم الموسيقي ينشأ عن ضَرب أوتار تُشكِّل أطوالُها نِسَبًا متسلسلة مِنَ الأعداد الصحيحة. كان هذا بالنسبة إلى الفيثاغورسيين علامَة ودليلًا على أنّ كلَّ شيء في الكون، سواء في عالَم الطبيعة أو فيما وراءها، يمكن التعبير عنه بالأعداد الكَسرية العادية (المعقولة[22])، وقادَتْهم عبادةُ الأعداد هذه إلى صُنع تعاويذ عدَدية معقَّدة تُعتَبر أساس عِلم الأعداد الحديث، ويشكِّل العدَد 1 فيها رَمزًا للخالق المقدَّس (ربما لأنّ العدد 1 هو أول عدَد ليس عدَمًا)، في حين رَمَزَ العدَد 2 إلى الأنوثة، والعدَد 3 إلى الذكورة لسبب ما لا يَعرفه إلا الفيثاغورسيين، وبذلك فقد رَمَزَ العدَد 5 (الأنوثة + الذكورة) إلى الزواج...!

تمسَّكَ الإغريقيون بسلسلة الأعداد الكَسرية العادية كنموذج للاستمرار بسبب عدم وجود أي دليل يُعارِض ذلك، واستمر ذلك الاعتقاد غير المُثبَتْ حتى القَرن السادس قَبل الميلاد عندما اكتَشفَ الفيثاغورسيون أنفسهم مِنْ بين كل الناس وجود ثغرات في هذا النموذج، ثغرات تعني اضطراب ديانتهم ذاتها...!

جاء هذا الاكتشاف بشكل غير متوقَّع بينما كانوا يحاولون حلَّ مسألة عادية تشبه سؤالنا: ما هو طول السُّور الذي يقسم أرضًا مربَّعة مساحتها مِيل مربَّع واحِد إلى مثلثَين متساويَين؟ يحلُّ الفيثاغورسيون عادةً مسألة بسيطة كهذه بتطبيق نظرية فيثاغورس التي تَنصُّ على أنه يمكن حساب طول أي ضلع مِنْ أضلاع مثلث قائم الزاوية بمَعرفة طول الضلعَين الآخرَين. طُبِّقتْ هذه النظرية في الماضي بنجاح لِحساب طول الأضلاع في كثير مِنَ المثلثات القائمة الزاوية، ولكن الذي أثار ذُعر الفيثاغورسيين في هذه المسألة هو أنّ نظريتهم لمْ توصِلهم إلى إجابة عدَدية دقيقة، بل أوصَلَتهم حساباتهم إلى أنّ طول السُّور هو 3/2 مِيل تقريبًا، وليس على وَجه التحديد والدقة، إذ لم تكن الإجابة الدقيقة عدَدًا معروفًا في مفرداتهم الرياضية، بل كانت عدَدًا لامعقولًا (لامنطقيًّا)...!

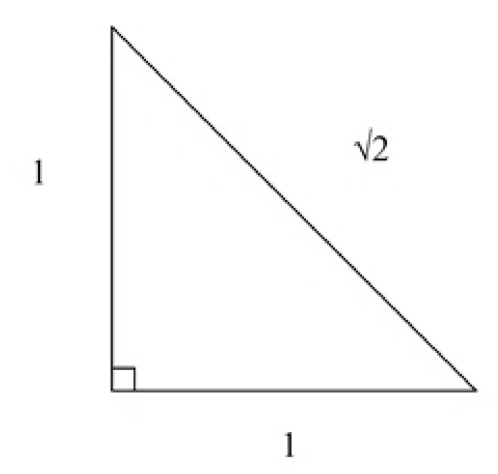
[المترجم: وهذا العدَد هو الجَذر التربيعي للعدد 2، أو طول وتَر المثلث القائم الزاوية الذي يساوي طول كل من ضلعيه القائمَين العدد 1] لأنه لمْ يكن عدَدًا يمكن تحديده بنسبةٍ بين عددَين صحيحَين كباقي الأعداد الكَسرية العادية، ولمْ يكن لمِثل هذا العدد وجودٌ في تصوّر وخيال

الإغريقيين القدماء. بل اكتَشف الفيثاغورسيون أيضًا أنّ هذا العدد لمْ يكن فريدًا، بل كان نموذجًا لكثير مِنَ الأعداد اللامعقولة الأخرى التي تُماثله في غموضه وغرابته...!



[المترجم: تنصُّ نظرية فيثاغورس على أنه في المثلث القائم الزاوية يكون مربّع

طول الوتر مساويًا لمجموع مربَّعَي الضلعَين القائمَين].



[المترجم: حسب نظرية فيثاغورس فإنّ طول الوتر في المثلث القائم الزاوية المرسوم أعلاه

يساوي الرقم √2، أي الجَذر التربيعي للعدد 2، وهو عدد لامعقول لأنه ليس عددًا كَسريًّا معقولاً

مثل باقي الأعداد الصحيحة والكَسرية المعقولة التي كانت معروفة للإغريقيين آنذاك].

دلَّ اكتشافُ الأعداد اللامعقولة غير العادية Irrational Numbers (الذي اعتبره الفيثاغورسيون كفرًا وإلحادًا وحاولوا إخفاءه في بادئ الأمر) على أنّ سلسلة الأعداد الكَسرية العادية لا تُعبِّر عن الاستمرار فعليًّا. فمثلًا لِنتصوَّر عَصًا طولها يساوي طول قطر مربَّع ضلعه مِيل واحد، كما هو الحال في مسألة الفيثاغورسيين، لا يمكننا إنكار أنّ طول هذه العصا هو طولٌ حقيقي...! ولكن عندما يُقاس طولُها بسلسلة الأعداد الكَسرية العادية فإنّ نهايتها ستقَع مقابل نقطة غير محدَّدة بعددٍ أو برقمٍ موجود في هذه السلسلة! بل إنّ هنالك كثيرًا مِنَ العصيّ التي تشبه هذه العَصا في أنّ طولها لا يمكن وَصفه أو التعبير عنه إلا بعددٍ ليس عددًا صحيحًا وليس جزءًا (كَسرًا) مِنْ عددٍ صحيح...! باختصار، لقد أثبتَ اكتشافُ الفيثاغورسيين أنّ سلسلة الأعداد الكَسرية العادية تحتوي على ثغرات وفجوات توجَد بشكلٍ ما بين أعدادِها اللامتناهية في قربها مِنْ بعضها بعضًا...!

اضطر علماء الرياضيات في القرون التي تلَتْ ذلك الاكتشاف إلى قبول الأعداد غير العادية اللامعقولة بمثابة شَرّ لا بد منه. اعتُبرتْ هذه الأعداد ضرورية، لأنها عندما تَدخل بشكلٍ ما في سلسلة الأعداد المعقولة الكَسرية العادية المتقطعة، فإننا نحصَل على سلسلة أعداد مستمرة بِحقّ. وفي الوقت نفسه، اعتُبرت هذه الأعداد شَرًّا لأنه لمْ يكن واضحًا في ذلك الوقت كيف يُمكِن إدخالها في سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة.

وُجدتْ نماذج كثيرة للأعداد اللامعقولة غير العادية دون أنْ يوجد أي تعريف مقبول لها في الرياضيات. لمْ تكن هنالك أية علاقة منطقية واضحة بينها وبين الأعداد الكَسرية العادية المعقولة. أي لمْ تكن هناك طريقة معروفة يمكن تطبيقها للوصول مِنْ عدد كَسري عادي معقول إلى عدد غير عادي لامعقول، وبينما تترابطُ الأعداد الكَسرية العادية المعقولة منطقيًّا مع بعضها في كَونها جميعًا نِسَب أو أجزاء مِنَ الأعداد الصحيحة، وطالما أنّ علماء الرياضيات لم يستطيعوا التوفيق بين الأعداد الكَسرية العادية المعقولة والأعداد غير العادية اللامعقولة فإنّ مفهوم سلسلة الأعداد غير العادية اللامعقولة ظلَّ مبهمًا ولا يمكن توضيحه رياضيًّا.

حتى القَرن التاسع عشر، كان عالِم الرياضيات الذي يحاول توضيح الأعداد غير العادية اللامعقولة يشبه شخصًا في حفلة عائلية يحاول أنْ يَعرف علاقةَ رجلٍ غريب ببقية أفراد العائلة. في سنة 1872، توصَّل عالِم الرياضيات الألماني ريتشارد ديديكيند[23] Richard Dedekind إلى طريقة مقبولة لِربط الأعداد الكَسرية العادية المعقولة بالأعداد غير العادية اللامعقولة وتوليد النموذج المثالي للاستمرار. سُمّيتْ أعدادُه سلسلة الأعداد الحقيقية Real Numbers، وهي التسمية التي أطلقَها علماءُ الرياضيات منذ القَرن السادس عشر على سِلسلتَي الأعداد الكَسرية العادية المعقولة والأعداد غير العادية اللامعقولة معًا. بَعد سنوات قليلة مِنْ اكتشاف ديديكيند، توصّلَ عالِمُ الرياضيات الألماني جورج كانتور[24] George Cantor إلى اكتشافٍ آخَر أجابَ بشكل نهائي قاطِع على كافة التساؤلات والانتقادات التي وُجِّهتْ إلى بُنية سلسلة الأعداد الحقيقية التي كانت تبدو مستحيلة. أكَّدَ كانتور أنه على الرغم مِنْ وجود عدَد لانهائي مِنَ الأعداد الكَسرية العادية المعقولة كما

تَصَور الإغريقيون، إلا أنّ تَعداد الأعداد الحقيقية هو أكبَر وأكبَر...! وهذا يُثبت أنّ سلسلة الأعداد الحقيقية أكثَر استمرارًا، وأكثَر تقاربًا وتماسكًا مِنْ استمرار الأعداد الكَسرية العادية المعقولة.

تَصَوَّرْ ما يَعنيه هذا الكلام: تَتقارَبُ الأعدادُ في سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة مِنْ بعضها بعضًا بشكل لانهائي، ولكنّ تَقارُبَ الأعدادِ في سلسلة الأعداد الحقيقية هو أكثَر مِنْ لانهائي...! حتى ولو استخدَمنا خِداع المَرايا، فإنّ هذا أمرٌ يستحيل علينا تصوّره وتوضيحه. تَخيَّلْ مثلًا مرآتَين متماثلتَين متواجِهتَين، إذا نظَرتَ في إحداهما ستَرى صورًا مكرَّرة لما في المرآة الأخرى مِنْ صُوَر، ثم تَخيَّلْ أنّ كلّ صورةٍ مِنْ هذه الصور هي عددٌ في سلسلة أعداد. إذا قرّبنا هاتين المرآتَين مِنْ بعضِهما، ستَتقاربُ الصُّور المتكررة، وسَتتقلّص المسافات التي تفصِل بينها. تشبه المسافات التي تفصِل بين الأعداد في سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة تلك المسافات التي تفصِل بين الصُّور عندما تقتَرب المرآتان مِنْ بعضهما إلى مسافة لانهائية في الصِّغر... أي متلامِستان... في حين أنّ المسافات التي تفصِل بين الأعداد في سلسلة الأعداد الحقيقية تشبه المسافة التي تفصِل بين الصُّور عندما تكون المرآتان أكثَر مِنْ متلامِستَين...! ولكن هذا لا يمكن أنْ يحدث إلا إذا تداخلت المرآتان في بعضهما بعضًا...!

تَطرح سلسلة الأعداد الحقيقية الصعبة التَّصور اختيارًا طريفًا على العلماء الذين يَدرسون الزمن، إذ يمكنهم رفضَها لأنها نموذج "غير علميّ" (أي غير قابل للقياس) للحقيقة والواقع، ويتعرَّضون بذلك إلى الانتقاد والتعريض بضِيق عقولهم...! أو يمكنهم قبولها كنموذجٍ محتمَل للحقيقة والواقع، ويتعرَّضون بذلك للانتقاد والتعريض لقبولهم للخرافات وإيمانهم بالألغاز...! ولا يمكن التوصُّل إلى اختيارٍ واحد شامل يقبله الجميع، ولذلك فلنفترَض الآن أنّ كلًّا مِنْ سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة وسلسلة الأعداد الحقيقية هي نموذج مقبول للاستمرار بطريقة أو بأخرى، في هذه الحالة فإنّ السؤال الذي نطرَحُه ليس فقط فيما إذا كان الزمن مستمرًّا أم لا، بل فيما إذا كان الزمن مستمرًّا بطريقة "الكسور العادية المعقولة" أم بطريقة "الأعداد الحقيقية"؟!

بالنسبة إلى السؤال الأول، إذا لم يكن الزمن مستمرًّا، فهذا يعني أنّ كل شيء في الكون، بما فيه الكون نفسه، يُعرَض بشَكل وحدات متقطِّعة كالصُّور في الفيلم السينمائي. ويعني أنّ التَّتابع الزمني هو سلسلة مِنَ الفترات المتقطِّعة، وأنّ الاستمرار الظاهري فيه ما هو إلا وَهم وخيال يشبه وَهم الاستمرار في الحركة الذي تَخلقه الأفلام السينمائية. ففي الفيلم السينمائي الذي يُعرَض بسرعة 24 صورة في الثانية، يتَحقَّق الوَهم باستمرار الحركة واتِّصالها لأنّ عيوننا تحتفظُ بانطِباع كلِّ صورة لفترة كافية لكي تبدو وكأنها تَتّصِل أو تَندَمج مباشرة بالصورة التي تليها، ويمرُّ التقطع دون أنْ نلحظه، ولو عُرِضَتْ الصور نفسها بسرعة بطيئة، أو لَو لَمْ تحتفظ عيوننا بانطباع الصُّور، للاحَظنا التقطّع، ولَظَهَر الفيلم السينمائي كسلسلةٍ مِنَ اللقطات المتقطعة المتلاحِقة.

يَستخدِم العلماءُ في دراسة الكون أدوات علمية لا تحتفظ كالعيون بانطباع الصورة فيها، ولمْ تُظهِر هذه الأدوات قطّ أي تقطّع في الحقائق الفيزيائية. إذا كان الزمن متقطِّعًا أو غير مستمر، فإنّ نتائج هذه التجارب تعني أنّ سرعة عَرض الحقائق الواقعية لا بد مِنْ أنْ تكون أسرَع مِنْ مئة بليون ترتليون (العدد واحِد مَتبوعًا بثلاثة وعشرين صِفرًا) لَقطَة في الثانية...! وإذا كان الزمن

مستمرًّا، يُطرح السؤال فيما إذا كان وجودنا الزمني يَتبع نمَط الاستمرار في سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة، أم في نمَط سلسلة الأعداد الحقيقية؟

مِنَ المستحيل إثبات أي مِنْ هذين النموذجَين بالقياس المباشر، لأنه يعني أنّ سرعة عَرض الحقائق الواقعية هي عدَد لانهائي مِنَ الصور في الثانية أو أكثَر. وأقصَى ما يمكن قياسه بشكل مباشر هو تِبيان أنّ سرعة عَرض الحقائق الواقعية يجب أنْ تكون أكثَر مِنْ عدَدٍ ما مِنَ الصُّور في الثانية، ولا يمكن للقياس المباشر إظهار أنّ سرعة العَرض هي اللانهاية، فكيف نستطيع قياس ما هو أكبَر مِنَ اللانهاية؟

يمكن بالتجارب غير المباشرة أنْ نحصل على بعض الأدلَّة. إحدى هذه التجارب هي أنْ نَدرُس بعض الظواهر الطبيعية التي ترتبط بالزمن لِنَرى فيما إذا كانت الأعداد الكَسرية العادية المعقولة تكفي وحدَها لِوَصف هذه الظواهر مِنَ الناحية الكمّية. فإذا كانت الأعداد الكَسرية العادية المعقولة كافية لذلك، فهذا يدلّ على عدم وجود علاقة بين الزمن وبين الأعداد غير العادية اللامعقولة، وأنّ سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة تمثِّل نموذجًا كافيًا وصحيحًا لاستمرار الزمن. ولكن إذا لمْ تكن كافية، فهذا يدلُّ على أنّ سلسلة الأعداد الكَسرية العادية المعقولة هي نموذج غير مناسب، ولا ينطَبق على استمرار الزمن كما اكتشَف الفيثاغورسيون مِنْ قَبل.

يجب علينا قبل ذلك أنْ نميز بين العدد الكَسري العادي المعقول والعدد غير العادي اللامعقول. لعل أهم مميزات العدَد غير العادي اللامعقول هو أنه لا يمكن كِتابته إلا بشكلِ سلسلةٍ لانهائية مِنَ الأعداد التي ليس لها أي نمَط معيَّن واضح، مثل الجَذر التربيعي للعدد 2 (وهو تقريبًا 1.414213562)، والعدد الثابت π الذي نحصل عليه دائمًا عندما نقسم محيط أية دائرة على قطرها، ويساوي تقريبًا (3.141592654). حُسِبَ هذا العدد الثابت مِنَ الأعداد غير العادية اللامعقولة تفصيلًا حتى مئات الآلاف مِنَ الفواصل العشرية دون أنْ يَظهر أي نمَط واضح في تسلسل أرقامه كما هو متوقَّع، وهذا شيءٌ أجِده غامضًا في العدد غير العادي اللامعقول، إذ تتوالى أرقامُه بشكلٍ عشوائي، ولكنه ليس اعتباطيًّا، فإذا بَدّلْتَ رقمَين فقط مِنْ سلسلة أرقامه اللانهائية الطويلة، فلن يكون لديكَ العدد غير العادي اللامعقول نفسه...! فكلُّ عدَد غير عادي لامعقول له عشوائيته الخاصة به، وكلُّ رقمٍ مِنْ أرقامِه له دَور مميّز في صُنع هذه العشوائية المتميزة الفريدة. يمكن كتابة العدَد الكَسري العادي بشكل كَسر عشري له سلسلة طويلة لانهائية مِنَ الأرقام أحيانًا، ولكن يوجد دائمًا نمَط ونظام واضح متكرر يمكن وَصفه وتحديده في الأعداد الكَسرية العادية المعقولة، فمثلًا: 0.0571428571428571428 = 35/2

0.01010101010101010101 = 99/1

6.00000000 = 6.

لا شك بأنّ هناك كثيرًا مِنَ الظواهر الطبيعية المعروفة التي ترتبط بالزمن، والتي يمكن وَصفها بدقّة تامة باستعمال الأعداد الكَسرية العادية المعقولة فقط. وتَخطر لي في هذا المجال

الكهرباء، وحركة الشّحنات الكهربائية في سِلك... وبفضل التجربة التي قام بها الفيزيائي الأمريكي روبرت ميليكان[25] Robert Millikan الذي حصَل على جائزة نوبل في الفيزياء سنة 1906 نَعلمُ الآن أنّ الشحنات الكهربائية لا توجَد إلا بشكلِ مضاعفاتٍ مِنَ الأعداد الصحيحة لشحنة ابتدائية لا تنقسِم. في الواقع هناك شحنَتان متساويَتان في القوة، ولكن إحداهما إيجابية والأخرى سلبية، بحيث إنّ الشحنات المتماثلة تَتنافَر، والشحنات المختلفة تَتجاذَب. وهناك افتراضات بوجود أجزاء صغيرة في الذَّرة تسمى الكوارك Quarks تَحمِل أجزاء مِنَ الشحنات الكهربائية هي 3/1 أو 3/2 مِنَ الشحنة الكهربائية الابتدائية التامة [المترجم: جاءت أدلة على وجود الكوارك سنة 1995، وثبت ذلك في تجارب تصادم الإلكترونات سنة 2015]، إنما لا يوجَد حتى الآن أي افتراض ولا أي دليل علمي على وجود أي شيء يَحمل شحنة كهربائية يمثِّلها عدد غير عادي لامعقول.

ثم هناك الكيمياء التي تَتحدَّد فيها قوى التفاعلات بخواص العناصر الكيميائية المتفاعِلة، وترتبط هذه الخواص بدَورها بالرقم الذَّرّي لهذه العناصر، والرقم الذَّرّي لِعنصر ما، يساوي عدَد الإلكترونات في كلِّ ذرَّة مِن ذرَّاته، وهذا الرقم هو دائمًا عدد كَسري عادي معقول، بل عدد صحيح على وَجه التحديد، فمثلًا، العناصر ذات الرقم الذَّري 2، 10، 18، 36، 54، 86 هي عناصر خامِلة لا تتفاعل مع العناصر الأخرى، بينما العناصر ذات الرقم الذَّري 9، 17، 35، 53، 85 هي الهالوجينات، وهي عناصر فعَّالة جدًّا، خاصة في إنتاج الأملاح. يتمتَّع الرقم 6 بأهمية خاصة بالنسبة لنا ولكلِّ المخلوقات العضوية الحية في هذا الكوكب، لأنه الرقم الذَّريّ لعنصر الكربون الذي يمتلك قابليةً خاصة للارتباط بالعناصر الأخرى، وتَشكيل جزئيات مِن سَلاسل طويلة أساسية للحياة، مثل جزئيات الحموض الأمينية والبروتينات والحموض النووية التي تحدِّد الوراثة.

وفي عِلم الأحياء أيضًا، يمكن وَصف الظواهر التي ترتبط بالزمن عن طريق الأعداد الكَسرية المعقولة، فمثلًا يتميَّز كلُّ نَوع مِنْ أنواع النباتات والحيوانات بعَددٍ معيَّن ثابت مميّز مِنَ الصّبغيات Chromosomes في خلاياه، وعدَد الصّبغيات هذا هو دائمًا عددٌ صحيح مثلما هو حال الرقم الذَّري.

على الرغم مِنْ هذا التفوق الواضح للأعداد الكَسرية العادية المعقولة في الطبيعة، إلا أنّ العِلم يحتاج أيضًا إلى الأعداد غير العادية اللامعقولة. فعلى مَرِّ القرون، لاحظَ العلماء اللائحة المتزايدة مِنَ الثوابت الخاصة التي يدلّ ظهورها في كلِّ نظرية علمية تقريبًا على أهميتها في دراسة وتفسير ظَواهر الكَون بحيث يمكن اعتبار هذه الثوابت الطبيعية بمثابة معلومات طبيعية أساسية. ويبدو الآن أنّ كلَّ عددٍ مِنْ هذه الثوابت الطبيعية هو عددٌ غير عادي لامعقول. فمثلًا أحَد أهم هذه الثوابت هو سرعة الضوء التي تمّ قياسها حتى تسعة أرقام عشرية دون أنْ تُظهِر الأرقام أي نمَط أو نظام واضِح (أفضَل ما توصَّلنا إليه في قياس سرعة الضوء هو أنها 299792458 مليون متر في الثانية). رقم ثابتٌ آخَر هو ذلك الذي يَصِفُ تبادل القوى في الذَّرة، ويُسمى ثابِت البُنْيَة الدقيقة Fine structure constant، ولا يوجَد أي نمط أو نظام واضح في أرقامه حتى لو تمّ قياسه إلى عشرة

أرقام عشرية (أفضَل ما توصَّلنا إليه في قياس هذا الثابت الطبيعي، وهو كمية دون بُعد، وليس لها وحدة قياس، وتساوي 0.0072973503).

يوجَد في الفيزياء وحدَها أكثَر مِنْ اثني عشر ثابتًا مِنْ هذه الثوابت الطبيعية التي تمّ قياسها مِنْ بضع إلى أحَد عَشر رقمٍ عشري دون أنْ يوجَد أي نمَط أو نظام واضح في تسلسل أرقامها. يصِل بنا هذا الدليل على وجود، وعلى أهمية الأعداد غير العادية اللامعقولة في الظواهر الطبيعية المتعلقة بالزمن، إلى إجابةٍ على سؤالنا حول استمرار الزمن، لولا صعوبة واحدة متبقِّية: مِنَ الصفات الخاصة التي تواجِه أية محاولة لِقياس عدَد غير عادي لامعقول هي أنه لا يمكن قياسه...! عندما نقيس عددًا غير عادي ما (مِثل ثابِت البُنْيَة الدقيقة) فإننا لا نستطيع أنْ ننفي نفيًا قاطعًا احتمال ظهور نمَط أو نظام في تسلسل أرقامه فيما لو تابَعنا القياس إلى سلسلة طويلة مِنَ الأرقام. ربما توصَّلنا بعد عَشر سنين مِنَ الآن إلى اكتشاف أنّ ثابِت البُنْيَة الدقيقة هو مثلًا 0.007297350372973 مما يدلّ على وجود نمَط أو نظام معيَّن في تسلسل أرقامه، وأنه قد يكون في الحقيقة عددًا كَسريًّا عاديًّا معقولًا، ويجب أنْ يستمر هذا النمَط في تسلسل الأرقام إلى ما لانهاية قبل أنْ نَحكُم بأنه عدَدٌ كَسري عادي معقول، وهذا أمرٌ لا نستطيع تحقيقه وتبيانه.

يقودُنا كلٌّ هذا إلى أنه باكتشاف الأعداد غير العادية اللامعقولة، طَرَحَ علماء الرياضيات مشكلة علمية لا يمكن حلّها بواسطة أي قياس أو قياسات ممكِنة نستطيع تصوّرها. وعلى الرغم من وجود تمييز واضح في الرياضيات بين الزمن المستمر بشكلٍ "حقيقي"، والزمن المستمر بشكلٍ "معقول"، إلا أنه تمييز لامعقول بالنسبة للعلماء التجريبيين.

ما بعد اللانـهايـة:

نظريـة كانتور في المجموعات والأعداد

ما بَعد اللانـهائيـة

"يُشبه المرءُ الأفكارَ التي تنضحُ منه".

غوته Goethe أتعجَّبُ مِن قدرة الإنسان على التخيل... تلك القدرة المدهشة العظيمة التي تَدفعنا إلى مناقشة حتى النقاط الدقيقة في أحلامنا وخيالاتنا. اختلفَ أذكياءٌ من الرجال والنساء في الماضي حول عدد الملائكة الذين يمكن أنْ يَتواجَدوا على رأسُ دبّوس...! واليوم يختلف الخبراء العسكريون حول صحة التنبؤات عن الحياة بعد حربٍ نووية شاملة إنْ كانت مُمكِنة أم لا.

في الرياضيات، تتعرَّض قدرة الإنسان على التّخيل لاختبارات قاسية تدفَعها إلى أقصى حدود المعقول، وقد توصَّل علماء الرياضيات إلى نجاح كبير في محاولاتهم الحديثة لتفسير وتحديد أحَد أصعَب المفاهيم على مرِّ التاريخ وهو مفهوم اللانهاية[26]. فعلى مرِّ السّنين، وحتى القَرن التاسع عشر، كانت فكرة اللانهاية فكرة مُبهَمة. كانت اللانهاية بالنسبة للروحانيين ذات مضمون مُبهَم مُتعلِّق باللاهوت، وكانت بالنسبة للآخرين بما فيهم علماء الطبيعة والرياضيات بمثابة مجال يضمّ كلّ ما يقَع وراء حدود التفكير المعقول. في هذا التصور الرهيب لفكرة اللانهاية، كنّا كما وَصَفَنا جورج برنارد شو George Bernard Shaw في كِتابه: الإنسان والإنسان الأمثَل Man and Superman مِثل رَجل الغابة الذي لا يستطيع أنْ يَعدّ أكثَر من عدد أصابعه: "بالنسبة لَه... العدد 11 هو عددٌ ضخم لا يمكن عدّه".

بدأ علماء الطبيعة والرياضيات في القَرن السابع عشر الحديثَ عن اللانهاية وكأنها يمكن أنْ تصبح ذات يوم مفهومًا معقولًا وواضحًا، ولكن اللانهاية كانت بالنسبة لهم اصطلاحًا عامًا لِوَصف كلّ شيء كبير لدرجة لا يمكن تصورها، ولم يكن لديهم أي تمييز بين اللانهايات. فمثلًا، ذكَر غاليليو في كِتابه: "محاورات حول عِلمَين جديدَين Dialogues Concerning Two New Sciences" اعتقاده بأن خطًّا طوله ثلاث بوصات يحتوي على عدد من النقاط يساوي عدد النقاط

في خطٍّ طوله ستّ بوصات، وهو عدد لانهائي. وقد قَبِل غاليليو بهذا التناقض، مثلما يقبله إنسان يتصوَّر أنّ الكون لن يكون أسهَل أو أصعَب مَنالًا لو كان حَجمه نصف ما هو عليه الآن أو ضعف ذلك...؟

بعد مرور قَرن من الزمن على غاليليو، ازدادت التناقضات التي تتعلَّق باللانهاية تعدُّدًا وصعوبة. في سنة 1851 نشَر عالِم الرياضيات التشيكي برنهارد بولزانو[27] Bernhard Bolzano في كِتاب صغير اسمه "تناقضات اللانهاية The Paradoxes of Infinity" أول محاولة عقلانية لمعالَجة هذا الموضوع، ولكنه تركَنا في موقف إنْ لم يكن أبعَد فهو ليس أقرَب بكثير إلى فَهم اللانهاية مما كنّا عليه قبل ذلك.

إذا كان علماء الرياضيات هذه الأيام أقرَب إلى فهم اللانهاية مِن أي وقت مضى فإن ذلك يعود بشكلٍ رئيسيٍ إلى التخيل الواسع والتصور الواضح الفعّال لعالِم الرياضيات الألماني جورج فرديناند لودفيغ فيليب كانتور[28] George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor الذي كان في السادسة من عمره عندما نُشِر كِتاب بولزانو. لم يَقصد كانتور أنْ يفكِّر في اللانهاية، إنما كان مِثل بقية علماء الرياضيات في الرُّبع الأخير من القَرن التاسع عشر مندفِعًا ومتحمِّسًا للاكتشافات الحديثة التي هزَّت اليقين الهندسي كأساس للرياضيات. كان علماء الرياضيات آنذاك في ذُعر عقلاني وهم يحاولون استبدال هندسة إقليدس بأساسٍ جديد، وتَصَوَّر أكثَرهم أنّ هذا الأساس الجديد يجب أنْ يَنبثِق مِن عِلم الحِساب وليس مِن الهندسة، ويجب أنْ يكون نظامًا عقلانيًّا مُستَنَدًا على الأعداد الصحيحة والكسور والأعداد غير العادية وليس على النقاط والخطوط والمستويات. كان هدَفًا واسعًا مبهَمًا وغير واضح، وقد أدّت الطرائق المختلفة التي سلكَها علماء الرياضيات إلى اتجاهات مختلفة... أما الطريق الذي سلكَه كانتور فقد وصَل به إلى اللانهاية... بل وإلى ما لم يكن متوقَّعًا... إلى ما بعد اللانهاية!

بدأ كانتور رحلته العقلية الطويلة بتصوّر مجموعة نهائية مِثل "مجموعة مِن الأشياء المُعَرّفة والمنفصِلة في تصوراتنا وأفكارنا" وسمَّاها ببساطة المجموعة المُتناهية Finite Set، وفي بحثه عن وضع أساس حسابيّ للرياضيات، أراد أنْ يَدرس مجموعات الأعداد بشكلٍ خاص، ولكنّ تعريفه ينطَبق أيضًا على مجموعةٍ مِن أشهر السّنة أو مِن البشر أو مِن أيّ شيء آخر.

حسب النظام المنطقي الذي اتَّبعه كانتور، تكون مجموعةٌ ما مُكافئةً لمجموعة أخرى إذا أمكن تحقيق التوافق العدَدي زوجًا زوجًا بين عناصر المجموعة الأولى وعناصر المجموعة الثانية. عندما عَرَّف كانتور التكافؤ بين المجموعات على هذا النحو، كان يَسعى إلى تسهيل المقارَنة بين المجموعات الكبيرة، مِثل مجموعة المقاعد في ملعب كبير ومجموعة المتفرجين الذين يأتون لمشاهدة مباراة فيه. حَسب تعريف كانتور فإنّ الطريقة لِمعرفة فيما إذا كانت هاتان المجموعتان متكافئتَين هي أنْ نُراقِب ما يَحدث عندما يَجلس كلّ شخص أو يحاول ذلك، فإذا بقي بعضُ

المتفرجين واقِفين، أو إذا ظلّت بعض المقاعِد شاغرة، فإنّ هاتَين المجموعتَين غير متكافئتَين. أما إذا جلس كلّ المتفرجون ولَم يَبقَ أيّ مقعد شاغر، فإنّ هاتَين المجموعتَين متكافئتان.

لا يتطلَّب منّا تعريفُ كانتور أنْ نَعدَّ، ولا حتى أنْ نعرف عدد عناصر أي من هاتَين المجموعتَين لكي نتأكَّد مِن تكافئهما. وكان هذا ما مكَّن كانتور من المقارنة ومن التمييز العقلاني بين اللانهايات، أو بشكل أصحّ بين المجموعات التي تضمُّ أعدادًا لانهائية من العناصر.

انطلقَ كانتور في خطوته الأولى نحو اللانهاية متسلِّحًا بهذه الأفكار البسيطة، وأوضَح كيف أنّ أية مجموعة منتَهية يمكن أنْ تفيد في تحديد مجموعة منتَهية أخرى أوسَع منها، وهكذا إلى ما لانهاية. وفي كل خطوة، تشملُ المجموعةُ الأوسَع كل المجموعات التي يمكن أنْ تضمها من المجموعات التي سبقَتها. يوضّح كانتور اصطلاحاته المختارة ويعرِّفها قائلًا بأنّ المجموعة المُحتواة Subset يمكن أنْ تتألف مِن لا شيء، أو يمكن أنْ تحتوي بعض، أو كلّ عناصر المجموعة بكاملها. وتسمى المجموعةُ التي لا تحتوي على أي عنصر من العناصر: "المجموعة الخالية Null Subset"، وتسمى المجموعةُ التي تحتوي على كلّ العناصر: "المجموعة غير الملائِمة Improper Subset"، في حين تسمى كلّ المجموعات الأخرى: "المجموعات الملائمة Proper Subset".

تُصلح أية مجموعة تضمّ عنصرًا أو أكثَر لكي تكون نقطة البداية في برهان كانتور الذي يمكن تسميته: طريقة الارتقاء Stepping-stone argument. فمثلًا، تُحدِّد مجموعة مؤلَّفة مِن عنصرَين (أ، ب) مجموعةً أخرى مؤلَّفة مِن أربعة عناصر (أ، ب، أب، والمجموعة الخالية). وتُحدِّد هذه المجموعة بدَورها مجموعةً مؤلَّفة مِن ستة عشر عنصرًا (أ، ب، ت، ث، أب، أت، أث، ب ت، ب ث، ت ث، أ ب ت، أب ث، أ ت ث، ب ت ث، أ ب ت ث، والمجموعة الخالية)... وهكذا دواليك.

يمكننا أنْ نتَنبّأ بالقفزات العدَدية في خطوات كانتور باستعمال معادلة بسيطة كانت معروفة في أيامه. حَسب هذه المعادلة فإنّ عدَد المجموعات الثانوية التي يمكن أنْ نُشكِّلها مِن مجموعة منتَهية تحتوي على عدَد من العناصر مقداره (س)، وهو يساوي العدَد (2) مَضروبًا بنفسِه بِقَدر العدد (س) مِنَ المرات. ويُعبَّر عن هذا العدَد بالرموز الرياضية بشَكل ($2^{س}$)، ويقال باللغة العربية: (اثنان قوّة س)، وهكذا فإنّ مجموعةً من عنصرَين تضمُّ 2^2 أي أربَع مجموعات ثانوية، ومجموعةً مِن أربعة عناصر تضمُّ 2^4 أي 16 مجموعة ثانوية.

لو توقَّفَ كانتور بعد تعريفه لهذه الخطوات لَكان قد قَدَّم لَنا وَصفًا عقلانيًا لِطَريقةٍ تُقرِّبنا مِن مفهوم المجموعة اللانهائية، ولكنها لا توصِلنا بالضرورة إلى المجموعة اللانهائية، ولَكان عمله محبَّبًا لهؤلاء الذين ناقَشوا آنذاك، ويُناقِشون الآن بأنّ اللانهاية هي فِعلٌ أكثَر منها اسم، وأنّ اللانهاية تدلُّ على شيءٍ بلا حدود، وليست شيئًا واقعيًّا يُمكن تحديده وتعريفه. ولكنّ ما حدَثَ هو أنّ كانتور، بعد أنْ بيَّن خطواته الأساسية، تابَع لِيُبرهِن على وجود مجموعة لامتناهية حقيقية.

انطلاقًا مِن رغبته في تطبيق نظامه المنطقي على الأعداد بشكلٍ خاص، جعَل كانتور نموذجه للمجموعة اللامتناهية Infinite Set هو مجموعة الأعداد الصحيحة، 4، 3، 2، 1 وهكذا. أي بكلمة أخرى، تُعامَلْ الأعداد الصحيحة في نظريته ليس على أنها تَتابع لانهائيّ (فِعل)، بل على أنها مجموعةٌ لامتناهية (اسم). وكأنما استلهم كانتور في تصوّر اللانهاية تلك الصورة التي رسمَها ويليام بليك William Blake في قصيدته "امسكْ باللانهاية في قبضَة يدك".

لم يكتَفِ كانتور بتسمية مجموعةٍ لامتناهيةٍ حقيقية في طريقه نحو تحقيق حُلمِه الشاعري، بل وصَفها بأنها المجموعة الوحيدة التي يُمكِن أنْ تَتكافأ مع أجزاء منها، على الرغم مما يبدو في ذلك مِن تناقض...! لِتوضيح هذا الوَصف، عاد كانتور إلى الأعداد الصحيحة وقال: إذا فكّرتَ في تَناوب الأرقام الزوجية في مجموعة الأعداد الصحيحة، فلربما تَصورتَ أنّ مجموعة الأرقام الزوجية، على الرغم مِن كَونها مجموعة لامتناهية إلا أنها تساوي نصف مجموعة الأعداد الصحيحة. ويَتوافق هذا التصوّر مع منطق حياتنا اليومية حيث يساوي الكلّ مجموع أجزائه. ولكن، إذا اتَّبعنا تعريفَ كانتور في تكافؤ المجموعات، فإننا نَجد أنّ المجموعة اللامنتاهية التي تضمُّ الأرقام الزوجية تكافئ تمامًا المجموعةَ اللامتناهية التي تضمُّ كلَّ الأعداد الصحيحة...!

لم يُبرهِن كانتور على تكافؤ هاتَين المجموعتَين بالتوفيق بين كلِّ عدد زوجيّ وكلِّ عدد صحيح بالطبع، ولكنه أثبتَ ذلك بالدليل غير المباشر، لأنه مِن غير المعقول وغير المنطقي أنْ يَتركَ التوافقُ بين عناصر المجموعتَين أيّ فائض مِن أي عنصر مِن عناصر هاتَين المجموعتَين، لأن كلًّا منهما لانهائية، وكلًّا منهما تحتوي على عدد لا يَنفذ من العناصر. كان هذا التناقض الظاهري بالنسبة له ولِكثير مِن مُعاصِريه مُفارقةً تُبرهِن على أنّ الكلّ يُمكِن أنْ يكون مساويًا لِجزء منه. مُفارَقة لا يمكن الهروب منها، وسِمَة عقلانية مِن سِمات اللانهاية... ولكنّ هذه المُفارَقة لَم تَمنَع خياله وتصوراته مِن الاستمرار في التقدّم إلى الأمام إلى ما بَعد اللانهاية.

مثلما استخدَم كانتور المجموعات المتناهية لِتعريف الخطوات نحو اللانهاية، فقد استخدَم المجموعات اللامتناهية لِتعريف الخطوات فيما وراء اللانهاية. كان مَنطِقه مشابهًا لِما سَبق: إنّ وجودَ مجموعةٍ لامتناهية يعني وجودَ مجموعةٍ لامتناهية أخرى أوسَع منها، وهي تعني بدَورها وجودَ مجموعةٍ لامتناهية ثالثة أوسَع منها وهكذا... إلى ما لانهاية...! وفي كلّ خطوة، تحتوي المجموعة اللامتناهية الأوسَع كلَّ المجموعات الجزئية التي يمكن أنْ تضمّها مِن المجموعة التي سَبقَتها. ويمكِننا تحديد القفزات العدَدية في خطواتِ كانتور بين المجموعات اللامتناهية باستِخدام المعادلة السابقة ذاتها... وكلُّ ما نحتاج إليه هو بعض الرموز الجديدة.

لنُسمي عدد العناصر في مجموعةٍ لامتناهية كما اقترحَ كانتور بالرّمز $\aleph_0$ الذي يُلفَظ (أَلِفْ صفر) وهو أوّل حَرف مِن حروف الأبجَدية العِبرية. حَسب المعادلة، فإنّ المجموعة التي تَضمّ $\aleph_0$ مِن العناصر (مثل مجموعة الأعداد الصحيحة) تتألفُ مِن المجموعات الجزئيَّة التي يساوي عددها $2^{\aleph_0}$ وهذا يَعني ضَرب العدد 2 بنفسِه $\aleph_0$ مِن المرّات. وحاصِل الضَّرب هذا لا بدّ مِن أنْ يكون أكبَر مِن $\aleph_0$ مثلما أنّ العدد $16 = 4^2$ هو أكبَر مِن العدد 4. هذه هي الخطوة الأولى إلى ما وراء

اللانهاية، وكان أول رَمز يُعبِّر عن أول عَدد فيما بَعد اللانهاية هو $\aleph_1$ (يُلفظ أَلِفْ واحد) كما سمّاه كانتور. هذه المجموعة اللامتناهية التي تضمّ عددًا مِن العناصر يساوي $\aleph_1$ تحتوي بالضرورة على عدد من المجموعات الجزئية يساوي $2^{\aleph_1}$ وهذه هي الخطوة الثانية التي وَلَّدتْ العدد الثاني فيما وراء اللانهاية... وهكذا.

لا شك بأنّ الأعداد فيما وراء اللانهاية Transfinite Numbers هي أعدادٌ كبيرة إلى درجة خارقة لا تصدَّق ولا يُمكن تصوّرها. هناك حوالي 10 بلايين نَجم (10,000,000,000) في مجرّة دَرب التَّبانَة التي تَنتمي إليها الشمس وكواكبها. وهناك حوالي (60,000,000,000,000) خلية في جسم الإنسان. وهناك حوالي (300,000,000,000,000,000) ثانية في عُمر الكون. ويُقدّر عدد البروتونات في الكَون بِعددٍ هو مِن أكبر الأعداد الموجودة في الطبيعة، ويُكتَب بالعدد 1 مَتبوعًا بِتِسعةٍ وسبعين صفرًا. وللمقارنة، إذا استطعنا أنْ نكتُب العدد ما بعد اللانهائي $\aleph_0$، فسيكون علينا أنْ نكتبه بالعدد 1 مَتبوعًا بأصفار تمتدُّ إلى ما لانهاية...! ونَكتب العدد ما بعد اللانهائي $\aleph_1$ بشكل العَدد 1 مَتبوعًا بأصفار تمتد إلى ما بَعد اللانهاية..! ولذلك فلَن نَستغرب إذا بَدتْ سلسلةُ الأعداد ما بعد اللانهائية ($\aleph, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 ...$) بالنسبة إلى كانتور وإلى الآخرين سلسلةً غير مُنتَهية، تُشبه ذلك الكَون الذي وصَفه الفيلسوف إمانُويل كانت Immanuel Kant: "*مِن الطبيعي أن نتصوَّر مجموعةً من النجوم كَنِظام مؤلَّف من عدد كبير من النجوم.. ويمكن اعتبار كل منها كَونًا... واعتبار أنها معًا تشكِّلُ أكوانًا أعظَم وأكبَر... وهذه الأكوان الأكبَر قد تكون مِثل سابقتِها ليست أكثر من عنصر من عناصر كَونٍ أكبر وأكبر...! لا نرى نحن على الأرض سوى أول عُنصر من عناصر علاقة متطورة مِن الأكوان والعَوالِم... يمكّننا الجزء الأول من هذا التسلسل اللانهائي من الأكوان المتداخِلة من إدراك وتَخمين ما يمكن أن يكون عليه الكُلُّ الكامل... ليس هنالك مِن نهاية...*".

نَشر كانتور في سنة 1874 برهانَه الذي انتقلَ به في خطواته المتتابعة من المجموعات المتناهية إلى المجموعات اللامتناهية وما بَعدها. عارَضَه كثيرٌ مِن علماء الرياضيات بشدّة في البداية، ورفَض بعضُهم نتائجَه كلها، لأنهم كانوا يرفضون الفكرة الأفلاطونية التي تتعامَل مع اللانهاية وكأنها اسمٌ لِشَيء، في حين شَعرَ آخرون بأنّ كانتور لَم يُتابِع برهانَه ومناقشَته إلى خاتمتِها المنطقية، وقالوا إنه لكي يَنسجم كانتور مع نفسه، يجب عليه أنْ يعامِل سلسلةَ الأعداد ما بعد اللانهائية مثلما عامَلَ مجموعة الأعداد الصحيحة، وهذا يعني وجود مجموعة لامتناهية من الأعداد ما بعد اللانهائية (مجموعة لامتناهية من الأعداد أَلِفْ $\aleph$) يمكن التعبير عنها بالرمز $\aleph_\infty$ (مجموعة أَلِفْ لانهاية). ويمكنه بهذه المجموعة أنْ يكرِّر خطوات مناقَشته لِتحديد سلسلةٍ جديدة مِنَ المجموعات الأكبر مِنْ مجموعة أَلِفْ لانهاية، أو ما يمكن تَسميتها بالمجموعات ما بَعد ما بَعد اللانهاية Trans-Transfinite Sets. ويمكن التعبير عن هذه المجموعات الجديدة بالرمز ב الذي

يُلفظ باء، وهو الحَرف الثاني في الأبجَدية العِبرية. وبالمِثل يمكن تشكيل تسلسل آخَر هو (ב$_0$, ב$_1$, ב$_2$...ב). ولكي يستمرّ في الانسجام مع مَنطِقهِ وبرهانه، فقد ذكَر علماءُ الرياضيات أنّ كانتور يجب أنْ يُعامِل هذه المجموعات الجديدة أيضًا بالمنطق نفسه. وهذا يعني وجود مجموعة لامتناهية أخرى يمكن التعبير عنها بالرمز ∞ב (مجموعة باء لانهاية)...! ثم يمكن تكرار المنطق نفسه مرات ومرات... إلى ما لانهاية...!

على الرغم من أنّ كانتور نفسه لم يتحمَّس لهذا الانتقاد وهذه المناقشة، إلا أنّ بعض علماء الرياضيات هذه الأيام يتحدَّثون عن "اللانهائي المُطلَق Absolute Infinite" ويَرمزون إليه بآخِر حَرف في الأبجَدية الإغريقية، وهو أوميغا ω، ويعتبرونه أكبَر لانهايةٍ ممكِنة. وحَسب هذا التعريف، فإنّ اللانهاية المطلقة هي اللانهاية التي لا يمكن أنْ نراها أو نتصوّرها أبدًا، لأننا إذا استطَعنا ذلك، فسيكون من الممكن أنْ نتصوَّر لانهاية أكبَر منها. يَدلُّ الرَّمزُ أوميغا ω في الرياضيات على شيءٍ لا يُمكِننا أنْ نتأمَّله أو نفكِّر فيه أبدًا.. وهي بذلك لا تَبتعِد كثيرًا عن الإلَه الذي وَصَفه لنا القديس غريغوري St. Gregory: *"مهما تقدَّمَ عقلنا في تصوُّر الإله، فلَن يُمكِنه إدراك ذات الإله، بل إدراك ما تحت الإله"*. ولكن حتى دون افتِراض اللانهائي المُطلَق أوميغا (ω)، فإنّ نظرية كانتور في المجموعات قد لاقَت القبول والاستِحسان بين علماء الرياضيات. وامتدحَ عالِم الرياضيات الكبير دافيد هيلبرت[29] David Hilbert في سنة 1910 نتائجَ كانتور قائلًا: *"إنها أعظَم زهور الذكاء الرياضي، وأحَد أعظَم إنجازات العقل البشري"*. كما مدَح عالِمُ الرياضيات والفيلسوف الإنكليزي برتراند رَسل إنجازات كانتور، ووَصَفها بأنها *"ربما كانت أعظَم ما يَفتخِر به هذا العَصر"*.

يعود السبب الرئيسي لكلِّ هذا المديح والإطراء في الماضي والحاضر إلى أننا باستِخدام مفاهيم كانتور ونظريته في المجموعات والتكافؤ بينها، نستطيعُ أنْ نُقارِن ونُميِّز بين اللانهايات التي كانت تبدو قَبلَهُ شيئًا واحِدًا كبيرًا إلى درجَة لا يُمكن تصوّرها. يبدو أننا عندما نفكِّر وفقَ نظرية المجموعات، نستطيع أنْ نوسِّع مَجالَ خيالنا وتصوراتنا إلى ما لانهاية، ولذلك كانت هذه النظرية فَتحًا جديدًا غير متوقَّع.

كانت أولى المفاجآت التي اكتَشفها كانتور هي أنّ المجموعة اللانهائية التي تضمُّ الأعدادَ الصحيحة تُكافِئ المجموعات اللانهائية التي تشكِّلُ جزءًا منها. في الحالة العادية لا تبدو الأمور كذلك... إذا نظرنا إلى حافّة مسطَرة نُشاهد بين كلِّ عددَين صحيحَين مسافةً يمكن أنْ تتَّسِع لِعدد لانهائي مِن الكسور. ولذا، يبدو أنّ عدد الكسور أكبَر من عدد الأعداد الصحيحة بما لانهاية، ولكن كانتور أثبَتَ أنّ المَظاهر خَدّاعَة، لأنّ كلَّ عددٍ كَسريّ يمكن أنْ يقابلُهُ عددٌ صحيح، وكلُّ عددٍ صحيح يمكن أنْ يقابله عددٌ كَسريّ، وبما أنه لدَينا $\aleph_0$ مِنَ الأعداد الصحيحة، فهناك $\aleph_0$ مِنَ الكسور كما برهَن كانتور.

أثبتَ كانتور أيضًا أنّ مجموعة الأعداد غير العادية (اللامعقولة) هي أوسَع مِنْ مجموعة الأعداد الصحيحة، ومِنْ مجموعة الكسور (الأعداد العادية المعقولة). ومرة أخرى توحِي المَظاهر العادية بأنّ العكس هو الصحيح. إذا نظَرنا إلى حافّة المسطرة، لَتعجَّبنا كيف يمكن أنْ نتصوَّر وجود أية فَجوة أو مسافة تَتَّسِع ولا حتى لِعدد غير عادي واحِد في ازدِحام الأعداد اللانهائي مِنَ الأعداد الكَسرية العادية...؟ وكيف يمكن أنْ نتصوّر مسافةً تتَّسِع لأكثر مِن عدد غير عادي في زَحمة اللانهاية مِنَ الأعداد الكَسرية؟ ولكن حَسب برهان كانتور، فإنّ هنالك بين كلِّ عددَين كَسريَّين مُتقارِبَين إلى دَرجةٍ لانهائية، وكذلك بين كلِّ جزأين متلاصقَين إلى درجةٍ لانهائية، يَكمُنُ عددٌ لانهائي من الأعداد غير العادية...! بل إنّ هناك عدد هائل من الأعداد غير العادية مَحشورة بين الكسور بحيث يَفوقُ العدد الكليّ للأعداد غير العادية عددَ كلِّ الكسور وكلِّ الأعداد الصحيحة مُجتمِعة...!

يَعتبر أغلب علماء الرياضيات أنّ البرهان على هذه النتيجة هو أكثَر إعجازًا وبراعَة مِنَ النتيجة لما فيه مِن ذكاء. بَدأ كانتور مناقشَته بفَرض أنّ كلّ الأعداد غير العادية قد كُتِبتْ بتسلسلٍ عَشوائيّ ورُتِّبتْ في عَمود واحِد: ...0.17643567

0.23482435...

0.62346286...

وهكذا... وإنّ استعمال النقط المتتابعة ضروريٌّ لِتبيان أنّ كلّ عدد غير عادي هو سلسلةٌ لانهائية من الأرقام العشوائية الترتيب. ثم تصوَّر كانتور بعدها أنه مُقابل كلّ عددٍ غير عادي يوضَعُ عددٌ صحيح بَدءًا بالعدد 1 هكذا: 1 ...0.17643567

2 0.23482435...

3 0.62346286...

في هذه المرحلة مِن المناقشة كان هدَف كانتور هو تِبيان فيما إذا كان هذا التَّقابل وهذه المقارنة ستَستَخدِم وتُنهي كلَّ الأعداد الصحيحة وما يُقابِلُ كلًّا منها مِن الأعداد غير العادية، إذا حدَثَ هذا، فسيَعلم أنّ مجموعةَ الأعداد غير العادية تُكافِئ مجموعةَ الأعداد الصحيحة، وأنّ عددَها هو $\aleph_0$ أيضًا، ولكنه أثبتَ أنّ هذا لَن يكون، واكتشَف أنه سيتَبقّى دائمًا عددٌ غير عادي واحِد على الأقل دون أنْ يقابله أي عدد صحيح..!

هناك حِيلَة تمكّننا مِن معرفة هذا العدد غير العادي المتبقّي، ابدأْ بكِتابة الرَّقم الأول من العدد غير العادي الأول في مِثالنا العمودي السابق، واتبعه بالرقم الثاني مِن العدد غير العادي الثاني وهكذا... ستَصل في النهاية إلى العدد اللامعقول 0.133.... ثم غَيِّرْ كلَّ رَقم مِن أرقام هذا العدد عشوائيًّا، تَحصلْ على عددٍ غير عادي، مِثل 0.245.... وهذا هو العدد المطلوب، لأنه عددٌ غير

عادي يختلف بالتصميم والإنشاء عن العدد غير العادي الأول في رَقمه الأول، وعن العدد غير العادي الثاني في رَقمه الثاني وهكذا... باختصار، إنه عددٌ غير عادي يختلف عن كلِّ الأعداد غير العادية الأخرى التي تَزاوَجت مع كلِّ الأعداد الصحيحة، مما يُبرهِن على أنّ الأعداد غير العادية أكثَر مِن الأعداد الصحيحة، وهو المطلوب.

تُثبِتُ هذه المناقشة أيضًا أنه إذا كنتَ تستطيع مِن حيث المبدأ أنْ تستمرّ في ذِكر الأعداد الصحيحة واحِدًا بَعدَ الآخَر إلى ما لانهاية، فإنك لَن تستطيع أبدًا أنْ تفعَل ذلك مع الأعداد غير العادية، لأنّ الأعدادَ غير العادية أكثَر مِن الأعداد الصحيحة، وأكثَر مما تستطيع ذِكره. لاحَظ كانتور هذا الفارق النوعيّ بين هاتَين المجموعتَين اللامتناهيتَين، فسَمَّى مجموعة الأعداد الصحيحة والكَسرية: اللانهاية التي تَقبَل العَدّ. وسَمَّى مجموعة الأعداد اللامعقولة غير العادية: اللانهاية التي لا تَقبَل العَدّ، أو اللانهاية المستمرّة. ولكنّ تسمية هذا الفارق النوعيّ كان أسهَل على كانتور مِن تحديد وتعيين الفارِق الكمِّي بين عناصر مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد غير العادية، ولَم نتمكَّن حتى اليوم مِن معرفة عدد الأعداد غير العادية على وَجهِ الدِّقة على الرغم من أنه قد تَبيَّن أنّ عددَها لا يمكن أنْ يكون أكثَر من $\aleph_1$ (وهو عددُ العناصر الموجودة في المجموعة اللامتناهية $\aleph_1$ أَلِفْ واحد، وهو عددٌ مِن أعدادِ ما بَعد اللانهاية كما بَيّنا سابقًا). عَرَف كانتور نفسه أنّ عددَ الأعداد غير العادية هو $\aleph_1$ على وَجه التحديد، لأنّ العدد $\aleph_1$ هو اللانهاية الأكبَر مباشرة مِن لانهاية $\aleph_0$ حَسب نظرية المجموعات. وقد عَرِف هذا بفرضية الاستمرار Continuum Hypothesis. ولكن هناك احتمال لا يُمكِن نَفيه هو أنْ يكون عدد الأعداد غير العادية يَقعُ في مكانٍ ما بين $\aleph_0$ و$\aleph_1$. ومِن الواضح أنه، حتى لو استَفدنا مِن نظرية المجموعات، فإنّ خيالنا ما زال قاصِرًا بحيث إننا لا نستطيع أنْ نميِّز ونتحقَّق مِن هذه الفروق، وبالتالي لا نستطيع أنْ نَحكم على صِحة أو خَطأ فرضية الاستمرار هذه.

مثلما طبَّق كانتور أفكاره في تكافؤ المجموعات على الأرقام الحسابية، فقد طبَّقها أيضًا على النقاط الهندسية وتوصَّل إلى نتائج أدهشَته هو نفسه. كان يريد أنْ يقارن ببساطَة بين مجموعاتٍ من النقاط في فراغاتٍ ذات أبعاد مختلفة: مِن الخطّ ذي البُعد الواحِد، إلى المستوي ذي البُعدَين، إلى الحَجم ذي الأبعاد الثلاثة وهكذا. كان يتوقَّع ويأمَل أنّ مجموعاته اللانهائية ستُساعده في التمييز بين مجموعات النقاط بطريقة بسيطة، كأنْ نقول مثلًا أنه في فَراغٍ ذي أبعاد متعدِّدة عددها (س)، يوجَد ($\aleph_{س}$) مِن النقاط، ولكن ما بَرهَن عليه هو أنّ هناك لانهاية واحِدة مِن النّقاط في كلّ فَراغ مهما كانت أَبعاده...!

برهَن كانتور على أنّ النقاط الموجودة في خطّ يُمكِن أنْ تَتقابَل بالاقتِران مع النقاط الموجودة في مستوي ذي بُعدَين، وتلك أيضًا مع النقاط الموجودة في حَجم ذي ثلاثة أبعاد، وهكذا... فإذا تخيَّلنا أنّ النقاط الهندسية هي بمَثابة أحجار بِناء، فقد بيَّن كانتور أنك تستطيع أنْ تضَع كميةً معينة منها بِشكلِ أبنِية في أي عدد مِن الأبعاد المختلفة...! وكان العُذر الوحيد في اكتشافِه هو أنّ

العددَ الحقيقي مِن النقاط الهندسية التي ذَكرناها هنا هو عددٌ غير محدَّد وغير مؤكَّد مِثل عدد الأعداد غير العادية، وليس هذا بمُصادَفة لأنّ عددَ النقاط الهندسية الموجودة على خطٍّ يرتبط مباشرة بعَدد الأعداد غير العادية في سلسلة الأعداد. وكما ذَكرنا سابقًا، فإنّ سلسلة الأعداد تشبه حافّة المسطرة، وهي ليست إلا خطًّا مستقيمًا تَتكافأُ نقاطه الهندسية مع الأعداد كلها: الصحيحة والكسرية وغير العادية، ولأننا لا نَعلَم كَم لدَينا مِنَ أعداد غير عادية، فلَن نستطيع معرفة عدد النقاط الهندسية. وهكذا فكلٌّ ما نستطيع قوله الآن هو أنّ عدد النقاط الموجودة في فراغٍ ما، هو لانهاية ثابتة مهما كان عدد أبعاد هذا الفراغ، وأنّ عدد هذه النقاط هو أكبَر من عدد الأعداد الصحيحة، وأنه يساوي عدد الأعداد غير العادية. بَيَّن كانتور أيضًا أنّ عدد النقاط الهندسية ثابِت أيضًا مهما كان حَجم الفراغ الذي توجَد فيه..! أي أنّ هناك عددٌ مِن النقاط الهندسية في هذه الصفحة ذات البُعدَين يُكافِئ عددَ النقاط الهندسية الموجودة في الكِتاب كله...! بل ويُكافِئ عدد النقاط الهندسية الموجودة في هذا الكَون ذي الأبعاد الأربعة...!

لو عَرف فلاسفةُ القرون الوسطى هذه النتائج التي توصَّل إليها كانتور، لأدرَكوا أنهم يستطيعون وَضع مجموعةٍ مِنَ "الملائكة مِنْ مَقاس النقطة" على رأس دبّوس، ومجموعة مُكافئة مِنَ "الملائكة - النّقاط" في السماء، التي يُفترَض أنها ذات عَدد لانهائي مِنَ الأبعاد، وذات ضخامة لانهائية...!

هذه المعلومات الخيالية الذهنية عن اللانهاية التي منحَنا إياها كانتور ومَن سَبقه مِن علماء الرياضيات، تزيدنا تقدّمًا على رَجُل الغابة الذي لا يستطيع أنْ يَعدّ أكثَر مِن أصابعه، كما وَصَفه برنارد شو، كما أنها تَرفَع مستوى تصوّرنا وعلاقتنا بالطبيعة والكون.

منذ زمن قصير مَضى... لا أكثَر مِنْ بضعة آلاف مِنَ السنين، لم يكن لدَينا مِنَ الأرقام ما يكفي للتعبير عن عدد حبّات الرّمل في الكُرة الأرضية. ولذا، فقد كان عدد حبّات الرّمل بالنسبة لَنا عددًا هائلًا في كبره، مِثل بُعدنا عن النجوم والمجرّات. ثم اخترَع العالِم أرخميدس[30] Archimedes نظامَ ترقيمٍ مَكَّنَه مِن التعبير عن كميات هائلة لَم يكن مُمكِنًا قَبلَه. استخدَم أرخميدس نظامَ الأعداد الذي اخترعَه، والذي يشكّل البداية السابقة للنظام العشري المعاصِر، واستطاع أنْ يَحسب عشرات الآلاف وآلاف الآلاف وآلاف آلاف الآلاف، وفي أحَد كتُبه، حَسَبَ لأول مرّة في تاريخ البشرية عدد حبّات الرّمل الموجودة على شواطئ العالَم كله... بل واستمرّ قائلًا: ***"إنّ عدد حبّات الرّمل التي يمكن أنْ تُحتَوى ضمن كُرَةٍ مِن مَقاس عالَمِنا هو أقلّ مِن 1000 وحدة من الترتيب السابع للأعداد"***، وهذا ما نَكتبه هذه الأيام بِشَكل 10^{52}، أو العدد واحِد مَتبوعًا باثنَين وخَمسين صفرًا...! كانت هذه هي المرة الأولى التي استخدَم فيها أي إنسان تعبير "أقلّ مِن" في وَصف سِعة العالَم، ولكنها لَم تَكُن الأخيرة. فمنذ ذلك الوقت حتى الآن، تتابَعَ علماء الرياضيات في توسيع قدرة الإنسان العادية المجرَّدة. وما توصَّل إليه علماء الرياضيات قد تَجاوَز حدودَ الكَون الفيزيائي، حتى أصبحَ بإمكاننا الآن أنْ نُجيب بثِقة على السؤال المُنمَّق الذي طرَحَه ألِكسندر بوب Alexander Pope في قصيدته: مَنْ يستطيع أنْ يَخترق الاتِّساع الهائل

ويستطيع أنْ يَرى عوالِم فوق عوالِم في الكَون الواحد،

وأنْ يُراقب تَداخل النظام في النظام،

والكواكب الأخرى التي تدور حول شموس أخرى،

والمخلوقات المتنوّعة الأخرى التي تَسكُن كلَّ نَجم،

يستطيع أنْ يقولَ لماذا صَنعَتْنا السماءُ كما نحن.

ولكن في هذا الإطار، العلاقات والارتباطات،

الصِّلات القوية، والتَّبعية اللطيفة،

والتَّدرج المَضبوط،

هل نَظَرتْ فيها روحكَ الشَّفافة؟

أم تُرى هل يَستطيع الجزء أنْ يحتوي الكلّ؟

لم يَعد الكَون الفيزيائي قادرًا على احتوائنا كليًّا، فنَحن مخلوقاتٌ نهائية ولانهائية في الوقت نفسه...! لأنّ وجودنا الفيزيائي المادي هو سَجين العِلم المادي المَحدود المُنتَهي، ولكنّ قدرتنا على التَّخيل والتَّصور ليست كذلك. منذ أنْ توصّل كانتور إلى اكتشافاته، تَحرَّر جزءٌ منَّا حتى الحدود البعيدة التي رَسمَتها أرقامُ أرخميدس... ونحن نُحلِّق الآن أحرارًا إلى ما بعد اللانهاية في هذا الكَون الفسيح.

الأفكار الفريدة:

اللانهايات الطبيعية

"لكي ترى عالَمًا في حبّة رَمل،

وسماءً في زهرةٍ بَريةٍ،

أمسِكْ باللانهاية في قبضَة يدكَ،

وبالخلود في ساعة واحِدة".

ويليام بليك William Blake

من كتاب "أمنيات البراءة"

في عِلم الرياضيات يُطلَق لفظ: "اللانهاية" على شيء أكبر مما تستطيع عقولنا أنْ تتصوّره. ولذا، فقد كان هنالك دائمًا كثير من علماء الرياضيات ممّن يرفضون التفكير بأنّ اللانهاية هي شيء محدَّد، لأنّ اللانهاية بالنسبة لهم هي مفهوم غير تام وغير كامل، وليست مفهومًا لشيء أو لفكرة كاملة تامة يمكن تحديدها. وهم يفضّلون تصوّر اللانهاية على أنها استمرارٌ لا ينتهي لأشياء محدَّدة واضحة يمكن تصوّرها وإدراكها مِثل سلسلة الأعداد الصحيحة:

1، 2، 3، 4، 5... وهكذا.

أما بالنسبة إلى آخرين من علماء الرياضيات، فإنّ اللانهاية هي اسمٌ لِمفهوم تامّ ومحدَّد. ولِحسن حظّ الرياضيات، كان من بين هؤلاء الذين اعتقَدوا بذلك الألماني جورج كانتور. منذ حوالي قَرن من الزمان، طرَح كانتور نظريةً مهمة في الرياضيات الحديثة هي نظرية المجموعات التي بيَّن فيها أنّ اللانهاية هي شيءٌ يمكن التعامل معه عقليًّا كَمفهوم واضح.

أحَد الأسئلة التي طُرِحتْ خلال هذا الخلاف القديم المستمر هو فيما إذا كان لدَى العلماء أي دليل على وجود لانهاية محدّدة واضحة في الطبيعة. وإذا كانت مِثل هذه اللانهاية موجودة، فإنها ستكون دليلًا يُعطِي علماء الرياضيات مُبررًا فيزيائيًّا لافتِراض وجود اللانهاية كَمفهومٍ محدّد وواضِح. أما إذا لم تَكن مِثل هذه اللانهاية موجودة في الطبيعة، فربما كان علماء الرياضيات الذين يصرّون على أننا مخطئون في تصوّر اللانهاية كَمفهوم تامّ ومحدّد على حَقّ في اعتراضهم. وفي الواقع، هنالك كثير من الوقائع العلمية القديمة والجديدة التي تُبيّن وجود النهاية كمفهوم تامّ ومحدّد، ولا أعني بهذا أنْ أتحدَّث عن اللانهايةِ الظاهرية للكَون، بل أتحدَّث هنا عن وجود لانهايات محدَّدة

ومُركَّزة بحيث تُعتَبر أشياء تامّة ومؤكَّدة، لأنّ الكَون هو دليلٌ على الاستنتاج المعاكِس الذي يتصوَّر أنّ اللانهاية هي استمرارٌ لا ينتهي لِشيءٍ لا نستطيع تصوّر كلّيته، ولا نستطيع دراسته علميًّا.

لعل أقدَم تجسيد معروف للانهايةٍ محدَّدة هو الإلكترون. تمّ عَزل الإلكترون في المختبر لأول مرة سنة 1897، ولكن منذ القَرن السادس قبل الميلاد تَنبَّأ الفيلسوف العالِم طاليس[31] Thales بوجود جسيمات دقيقة تنقل الطاقة الكهربائية (كان أحَد أوائل الذين درَسوا صِفات الكهرباء الساكِنة والتَّجاذب الذي ينشأ عن دَلْكِ قطعةٍ مِنَ العَنبَر بقماشٍ مِن الصّوف). وفي القَرن الثامن عشر، عِلِمنا من نتائج التجارب على الكُرات المَشحونة كهربائيًّا أنّ تأثير الطاقة الكهربائية يتَناقَص كلما ابتَعدنا عن مَصدرها، وكانت مِن أوضح هذه التجارب تلك التي أجراها المهندس الفرنسي شارل دو كولون [كولومب][32] Charles de Coulomb الذي أكَّد في سنة 1785 أنه إذا ضاعَفنا المسافة بينَنا وبين مَصدر الطاقة الكهربائية مرَّتَين، فإنّ تأثير وقوة مَجاله الكهربائي تَنخفِض أربَع مرات.

لعل أبسَط وأغرَب الاستنتاجات التي تتَرتَّب على قانون كولومب هو أنّ الطاقة الكهربائية تزداد قوة كلما اقتربنا مِن الإلكترون، وعلى وَجهِ الدِّقة، إذا قسَمنا المسافةَ بينَنا وبين إلكترون إلى النصف، فإنّ قوة المَجال الكهربائي ستزداد أربعة أضعاف، وهكذا دواليك باستمرار كلما تناقصت المسافة تضاعفت قوة المجال الكهربائي حتى تصبح لانهائية عند الإلكترون، وفي ذلك تجسيدٌ فيزيائي محدَّد للّانهاية، فهذه اللانهاية لا تزداد باستمرارٍ لا ينتهي، بل تَتحدَّد في نقطة واحِدة هي الإلكترون. لا ينطَبق قانون كولومب في المسافات الصغيرة جِدًّا (تحت الذَّرّية) داخل الذَرَّة. وهكذا يُعتَبر الإلكترون لانهاية محدَّدة ومُركَّزة وواضحة، وهي لانهايةٌ سَهلةُ الحَمل، لأنّ الإلكترون يتحرك بسهولة وحرية في كل مكان. لا تستطيع أعينُنا لِسوء الحظّ أنْ تَرى هذه اللانهايات المحدَّدة المجسَّدة. ولذا، يَترتَّبُ علينا مراقبَتها مِن خلال الأجهزة الإلكترونية وأجهزة المقاييس العلمية، مِثل عداد غايغر Geiger Counter، وغُرَف الشَّرارات (وهي أجهزة تُصدِر أصواتًا أو شَرارات عند مرور الإلكترونات فيها، ولكنني أجِدُ من الصعب عليّ أنْ أصدّق أنّ هذه الإشارات المتواضِعة الخافِتة هي دليلٌ جيد على المظهر الحقيقي الذي يجب أنْ تتمتَّع به اللانهايات المُجسَّدة!).

هناك نموذجٌ هام آخر في الطبيعة مِن اللانهايات المُجسَّدة، وهو نموذجٌ قد يكون بإمكاننا رؤيته، وهو الثقب الأسود Black Hole... الذي يتألف مِن البقايا المُركَّزة الهائلةِ الكثافة بعد انفجار نَجمٍ كان نشيطًا ذات يوم. عندما يَستهلكُ نَجمٌ كلّ وقودِه (الذي يتألف مِن الهيدروجين والهليوم بشكل رئيسي) تَبرُدُ مادَّته وتصبح معتِمة، ثم بسبب ضعف قوة اندفاع مادة النجم إلى الخارج نتيجة نقص وقود الانفجارات الهيدروجينية الهائلة (التي تتوازن عادة مع قوة الجاذبية التي تشدّ مادة النَّجم إلى الداخل)، يَنكمِش النّجم على ذاته، وهنا إذا كانت كتلة النّجم الأصلية ليست كبيرة جدًّا (أقلّ مِن ثلاثة أضعاف كتلة شَمسِنا مثلًا)، فإنّ انكماش النجم على ذاته يتوقف عند مرحلة معينة تقدَّر بحَجم كُرةٍ قطرها مِن خمسة إلى عشرة آلاف مِيل، وهذا يعني أنّ كتلته ستتركَّز في حَجمٍ صغير نسبيًّا (بالمقارنة مثلًا مع شَمسِنا التي يبلغ قطرها الآن 800,000 ميل) وهكذا فإنّ تركيز المادّة في هذه

النجوم الميتة التي تُسمى: الأقزام البيض، أو النجوم النيوترونية، هو تركيزٌ كبير. ويقدَّر وَزنُ قطعةٍ مِن هذه النجوم حَجمها كَحجم مكعب السُّكر الصغير بمئة طن تقريبًا.

هذا ما يحدُث عندما يكون النّجم ليس هائلَ الحَجم أصلًا، أما إذا كان ضخمًا، فعندما يستهلك النّجم الميت وقودَه، فإنه يَنكمِش إلى نقطة تحت تأثير قوة الجاذبية الكبيرة فيه، وفي هذه الحالة يصبح تركيز المادة في هذا النجم النُقَطِيّ لانهائيًّا، لأن كلّ مادَّته تَنضغِط وتتركَّز في حجمٍ مُتناهٍ في الصغر هو صفر حقيقي. يُسمَّى هذا الجسم الذي تتركَّز فيه المادة بشكلٍ يصعب تصوّره... هذه اللانهاية المُركَّزة... تُسمَّى الثقب الأسود، لأنّ قوة جاذبية هذا الجسم هائلةٌ إلى درجة أنّ الضوء لا يستطيع أنْ يَخرج منه، بل هو الذي يَجذب إليه كلَّ ضوءٍ يمرُّ بقُربه. إذا جُذِب جسمٌ ما (قمر صناعي تائه على سبيل المثال) إلى الكرة الأرضية، فإنه يستطيع أنْ يَهرب مِنْ جاذبية الأرض إذا كان لدَيه ما يكفي مِنَ الطاقة الحركية، ولكنّ الهروبَ مِنْ جاذبية الثقب الأسود مستحيلٌ حالما يبدأ جسمٌ بالانجِذاب إليه، لأنّ الهروب من جاذبية الثقب الأسود يحتاج إلى كمية لانهائية من الطاقة.

يتصرَّف الثقبُ الأسود وكأنه مكنسة كهربائية لا يمكن مقاومة قدرتها على سَحب الأشياء الموجودة في مجال فعاليتها. ولذا، فقد افتُرض أنه إذا استطعنا النَّظر إلى الثقب الأسود عن بُعد، فإن منظره سيكون بشكل منطقة سوداء، ولن نستطيع أبدًا رؤيةَ نقطة التركيز اللانهائي ذاتها، لأنها توجَد في مركَز المنطقة المُعتِمة، ولا يمكن لأي ضوء أن يَصدر عن هذه اللانهاية المركَّزة ويصِل إلى عيوننا لكي نراه...!

اقترحَ بعضُ علماء الفلك مؤخَّرًا أنه إذا كان الثقب الأسود يدور حول نفسه بسرعة كافية، فقد ينقَشع بعض التعتيم عنه، وتنكَشف اللانهاية المركَّزة فيه، ويمكن أن تَصدُر عنه أيضًا كمية هائلة من الإشعاعات. إذا كان هذا صحيحًا، فستكون هذه فرصة نادرة لكي نشاهد اللانهاية المركَّزة، ولكن ما زالت هنالك بعض التساؤلات حول صحة هذه الفرضية، ولَم يستطع حتى الآن سوى فلكيٍّ واحِد، هو الأمريكي جوزيف ويبر Joseph Weber أنْ يدّعي رؤيةَ إشعاعات صادرة عن مركَز مجرّتنا يمكن أنْ تكون صادِرة عن ثقبٍ أسود يدور حول نفسه، ولكنّ العلماء الآخرين الذين بَحثوا عن مَصدر الإشاعات هذا لم يستطيعوا رؤيته. وهكذا تظلُّ الأمور مبهمَة فيما يتعلَّق بالثقب الأسود الدَّوار.

أما الثقوب السوداء "العادية"، فقد تمكَّن أغلب علماء الفلك مِن رؤية بعضها في الكَون بين النجوم، ويؤكِّد علماء الفلك على وجودِ ثقبٍ أسود في مجموعةِ كَوكَبة الدجاجة Constellation Cygnus متزاوجًا مع نَجمٍ عادي. وسببُ تأكُّدهم من ذلك، هو أنهم عندما درَسوا الحركةَ المضطربة لهذا النّجم العادي، تأكَّدوا من ضرورة وجود جسم هائل بِالقرب منه، ولكن عندما بَحثوا عن هذا الجسم الهائل المُجاور، لم يشاهدوا شيئًا، فاستَنتَجوا أنّ هذا المُرافِق الهائل الذي لا تُمكِن مشاهدته هو ثقبٌ أسود أطلقوا عليه اسم Cygnus x-1.

تَنبّأ علماء الفلَك مؤخَّرًا بأنّ الثقوب السوداء "العادية" يمكن أنْ تكون أصغَر بكثير مما كان يُعتقد في الأصل، وهناك بعض المشاهَدات الفلَكية التي تؤيد ذلك. حَسبَ نظريات عِلم الفلَك الحديث، فإنّ هذه اللانهايات المركَّزة التي يلفُّها الظلام يمكن ألا يزيد قطرها على قطر نَواة الذَّرة (وهو 0.0000000000001 سنتيمترًا تقريبًا)، ويمكن أنْ تتحرك مِثل الإلكترونات، ويُفترض أنّ هذه الثقوب السوداء الصغيرة قد تشكَّلتْ منذ عشرة بلايين سنة تحت تأثير الضغط والحرارة الهائلَين اللذان يُعتقد بأنهما كانا موجودَين عندما كان الكَون في بدايَة تَشكُّله. وعلى الرغم من أنّ هذه الثقوب السوداء صغيرة جدًّا، إلا أنها ذات كتلة هائلة التركيز، ويمكن أنْ تؤدّي إلى ضَرر كبير في أيّ جِسم تصطَدم به.

عندما اقتُرِحتْ فرضيةُ الثقوب السوداء الصغيرة هذه، فَسَّر كثير من العلماء الانفجارَ الغامض الهائل الذي حدَث في سنة 1908 في منطقة تونغوسكا Tunguska في سيبيريا بأنه ربما حدَث بسبب اصطدام أحَد هذه الثقوب السوداء الصغيرة بالأرض في تلك المنطقة. ذَكَر سكانُ تلك المنطقة آنذاك أنهم شاهدوا كُرةً ناريةً تَخترقُ السماء ذات ضِياء شديد *"ظَهرت الشمس حِيالَه مُعتمة مُظلمة"*. ولا يمكن التأكد من حقيقة ما حدَث هناك بالطبع، ولكن مِن حيث المبدأ، فإنّ اصطدام الثقب الأسود الصغير يمكن أنْ يُصدِر كمية هائلة مِن الطاقة تساوي الطاقة الناتجة عن انفجار قنبلة نووية.

يُسمّي العلماءُ اللانهايات المركَّزة، مِثل الإلكترون والثقب الأسود، باسم: المُنفَرِدات أو المُتفرّدات Singularities. وهي كما رأينا نقاط في الفراغ تتركَّز فيها كميةٌ فيزيائية لانهائية في مقدارها. ولذا، فإنّ مجرد قبولنا للاعتقاد بوجودِها يُخفّف مِن حدَّة الاعتراض القائل بعدَم وجود سبب معقول لِتصوّر اللانهاية وكأنها شيءٌ تامٌّ ومحدَّد. المُنفَرِد أو المُتفرِّد Singularity هو لانهايةٌ محدَّدة يمكنكَ أنْ تمسكَ بها في يدكَ. وفي الحقيقة، إذا فكرنا بالإلكترون فهناك بلايين وبلايين مِن الإلكترونات موجودة في يدكَ الآن...!

بما أنّ هذه المنفردات موجودة فيزيائيًّا بالفعل، فلا يبدو غريبًا أنْ نُدافِع عن وجودها المعنوي، وأنْ يتمّ التعبير عنها في الرياضيات. لا يعني هذا أنّ إدراكنا لِوجود هذه المنفردات فيزيائيًا يجعلنا نَقترِب مِن إدراك وتصوّر كِبر اللانهاية، ولكننا نُصبح أقرَب إلى قبول التَّصور بأنّ اللانهاية يمكن أنْ تكون كلًّا تامًّا ذا حدودٍ واضِحة، بدلًا مِنْ تصوّرها كجَبهة مستمرة في التقدُّم والاتّساع بشكلٍ لا ينتهي، ودون حدود.

هنالك نموذج هام آخَر يؤيد تصوّر اللانهاية كشيءٍ محدَّد حتى ولو لم يكتشف العلماء منفرِدات مِثل الإلكترون، والثقب الأسود... نموذجٌ كان موجودًا منذ أنْ خطرَتْ لَنا فكرة اللانهاية، وأطلَقنا عليها هذا الاسم، وانغمَسنا في حِوار طويل حول صِفاتها... لعلّ أقدَم نموذج يمثِّل لانهايةً محدَّدة هو العقل نفسه. لأنّ اللانهاية موجودة في العقل... العقل الذي لا يقلُّ تفرُّدًا عن الإلكترون والثقب الأسود.

اختراع الحقيقة:

تطبيق الرياضيات البَحتة

"يَجمعُ رئيسُ الوزراء... الخيالُ،

يَجمعُ الكونَ المجهول كالجواهر في كأس مرصَّع..".

جون دافيدسون John Davidson من كتاب "وعاء يسَع البحر"

آمَن الفيلسوفُ الإغريقي أفلاطون بأنّ كلّ ما يُمكِن تخيّله وتصوّره يوجَدُ في الحقيقة في مكانٍ ما هنا أو هناك في هذا الكَون، وشاركَهُ هذا الاعتقاد أيضًا كثير من رواد العِلم الأوروبيين في القَرن الثامن عشر، مِثل الفيلسوف الإنكليزي جون لوك John Locke. قادَهم إيمانهم بهذا التَّصور إلى أنهم صدَّقوا كل ما قيلَ لهم من أخبار عن رؤية حوريات البحر وغيرها من غرائب خيال الإنسان. هذا المبدأ الذي يدعى: مبدأ الوفرة Principle Plenitude وهو يَنصُّ على أنّ كل شيء مُمكِن الوجود هو مؤكَّد الوجود (متوفِّر)، ويُعتبر هذا المبدأ فرضية واهِنة ضعيفة فيما يتعلَّق بالأشياء التي نتَخيلها، ولكنه حقيقة بَيِّنة فيما يتعلَّق بالتَّصورات في الرياضيات، حتى عندما تكون غريبة كَغرابة حوريات البحر. لقد ثَبتتْ صِحة هذا المبدأ في كلّ فرع مِن فروع الرياضيات، وبشكلٍ خاصّ في علوم الجَبر (العِلم الذي يَدرس العلاقات الحسابية بين الأعداد)، فخلال القرون الأربعة الفائتة، اكتشَف علماءُ الجَبر أنواعًا جديدةً غريبةً مِن الأعداد، وكلما اكتشَفوا نوعًا جديدًا غريبًا مِن الأعداد، اكتشفَوا بعد حين أنه يُصلِحُ لِوَصف شيءٍ حقيقي. تزداد الحقائق التي تؤيّد صِحة مبدأ الوفرة هذا إذا عرفنا أنّ الأفكار في الرياضيات تَنشأ عادة في العقول القادرة على التَّخيل، والتي يكون هدفها الأول هو أنْ تكون عقلانية ومنطقية أكثَر من كَونها واقعية وحقيقية، وإنّ التوافق الشامل بين العالَم الذي يتصوّره علماءُ الرياضيات وبين العالَم الطبيعي الواقعي لم يَحصل بسبب سَعي علماء الرياضيات لِوَصف حقائق الطبيعة.

يَسعى علماءُ الرياضيات في عِلم الجَبر إلى دراسة كل الطرائق التي يمكن أنْ تترابط فيها الأعداد من خلال العمليات الحسابية العادية: الجَمع والطرح والضرب والتقسيم. فمَثلًا في دراسةِ علاقة جَمع بسيطة مِثل: $3 + 4 = 7$ أثبتَ علماءُ الجَبر أنّ جَمعَ عددٍ صحيح إلى عددٍ صحيح، يَنتج عنه دائمًا عددٌ صحيح. وهُم يُعَبّرون عن ذلك بقولِهم إنّ الأعداد الصحيحة "مُغلَقة" في حالَة الجَمع، ويكتبونها باختصار بِشكل المعادلة س + ص = ع حيث يمثّل كلّ حَرف مِن حروف هذه المعادلة عددًا صحيحًا.

يَستخدم علماءُ الجَبر الحروفَ لِتحلَّ مَحلَّ الأعداد لأنها تمكِّنهم مِن وَصف علاقةٍ حسابية تشمل فئةً كاملة من الأعداد. عندما تُستبدَل كلُّ الحروف ما عدا حَرف واحِد في معادلة شاملة مِثل: س + 4 = 6 فإنّ الحَرف الباقي (س) يلعَب دَور العدد الصحيح الوحيد الذي يمكن أنْ ينسَجم مع هذه المعادلة التي تُعتبر مسألة يجب حلّها. تمثّل هذه المعادلة الجَبرية واحِدة مِن أبسَط المعادلات الجَبرية التي يمكن تصوّرها، ويستطيع أغلبُنا أنْ يحلَّها ذهنيًّا (والجواب هنا بالطبع هو س = 2). ولكن بعض المعادلات الجَبرية المعقدّة لا يُمكن حلُّها بسهولة (مَثلًا العدد الصحيح (س) الذي يحلّ المعادلة س^3 + س^2 + 3 س + 4 = 96 هو س = 4). وقد انصرَفتْ جهودُ علماء الجَبر على مرِّ السّنين إلى استنباط الحلول لِمثل هذه المعادلات.

في القَرن السادس عشر، لم يعتَرف علماءُ الجَبر [*الأوروبيون*] إلا بوجود الأعداد الموجبة، ولكنهم عرفوا منذ ذلك الوقت أثناء حلِّ بعض المعادلات الجَبرية أنّ قيمة (س) قد تكون نوعًا آخر من الأعداد. ففي المعادلة س + 3 = 2 مثلًا، فإنّ س = -1، ولكن الأعداد السالبة كانت مشكلة أمام علماء الجَبر قَبل أربعة قرون مضَت[33]. يُمكن تمثيل الأعداد الموجبة بشكلٍ مادّي مَلموس بشكلِ أحجار أو علامات على الورق، ولكنه من الصعب قبول وجود شيء "أقلّ مِن لا شيء" كما اشتكى الفيلسوف وعالِم الرياضيات الفرنسي رينيه ديكارت[34] René Descartes. وفي الحقيقة، فإن عدم وجود طريقة منطقية للتفكير بالأعداد السالبة، وعدم وجود نموذج يوضح مفهوم هذه الأعداد، كانا وراء معاناة علماء الجَبر في فهم ما يَعنيه جَمع وطرح وضَرب وتقسيم الأعداد السالبة. لذلك، لم تُعتَبر الأعداد السالبة آنذاك أشياء قانونية شرعية في دراسة الجَبر، ولم يكن لوجود هذه الأعداد في بعض المعادلات أهمية، إلا كأهمية وجود كلمات مُبهَمة في اللغة.

في أواخر القَرن الثامن عشر، تعلّم علماء الجَبر كيف تطبَّق العمليات الحسابية على الأعداد السالبة، وارتبطَ هذا بمَفهوم الاستِدانة والاستِقراض، فمثلًا: إذا كان لديك -10 دولارات في حسابكَ، فهذا يعني أنّ عليك دَينًا يساوي 10 دولارات، وإنّ طَرح (-10) يساوي تمامًا إضافة (+10) لأنه كما لاحظَ عالِم الرياضيات السويسري ليونهارد أويلر[35] Leonhard Euler في سنة 1770: *"إنّ وفاءَ دَينٍ يساوي إعطاء هدية"*.

توصَّل علماء الجَبر أيضًا إلى طريقةٍ لِضرب الأعداد السالبة، وهي طريقةٌ يَسهل تمثيلها بموقف عادي. تصوَّر مثلًا وجود نوعَين مِن الأصوات في الانتخابات: الأصوات الموجبة والأصوات السَّلبية. الصوت الإيجابي هو الذي أَعطَى رأيه، وبذلك فهو يؤثِّر إيجابيًّا على نتيجة الانتخاب، والصوت السَّلبي هو الذي يَحقّ له التصويت لكنه لم يُعطِ رأيه، وبذلك فهو يؤثِّر بشكلٍ غير مباشر على نتائج الانتخابات. لكي تدركَ كيف ينطَبق هذا المِثال على طريقة ضَرب الأعداد السالبة، تَصوَّر أنّ كل صوتٍ مؤيِّد لِقضيةٍ ما يساوي عَشر نقاط إيجابية، وأنّ صوتًا معارضًا لهذه القضية يساوي عَشر نقاط سلبية. في هذه الحالة هناك طريقَتان لِنجاح القضية المقترَحة: إما بتقديم تصويتٍ موافِق، أو بعدم تقديم تصويتٍ معارض. تمثِّل الطريقةُ الأولى أسلوب الضرب العادي

المُتّبع في ضَرب الأعداد الموجبة، وهذا يعني أنه إذا تقدَّم خمسة ناخِبين بأصواتهم المؤيِّدة، فإنّ القضية المقترَحة سَتكسب خمسين نقطة إيجابية (5 * 10 = 50). وتمثِّل الطريقةُ الثانية أسلوب ضَرب الأعداد السالبة، وهذا يعني أنه إذا لَم يتقدَّم خمسة ناخبين بأصواتهم المعارِضة، فإنّ القضية المقترَحة سَتكسب بشكلٍ غير مباشر خمسين نقطة إيجابية (-5 * -10 = 50)، خمسون نقطة تَفَوّق كان مِن المُمكِن ألا تكسبها القضيةُ المقترَحة، أو بكلمة أخرى خمسون نقطة كان من المُمكِن أنْ تخسَرها القضيةُ المقترحة.

باختصار، إنّ حاصِل ضَرب عدد موجب بعَدد موجب، وحاصِل ضَرب عدد سالب بعدد سالب هو عددٌ موجب دائمًا. تسمّى هذه القاعدة بقانون الإشارات. ومِن بين كلّ القواعد الجَبرية التي تتعلّق بالأعداد السالبة، تُثير هذه القاعدة الحِيرةَ والارتباكَ لدَى أكثَر الناس. وقد عبَّر الشاعر أودن W.H. Auden عن نَفاد صَبره مع قانون الإشارات في سَطرَين: *"سالب ضرب سالب يساوي موجب، وسَبب هذا لا يمكننا مناقشته"*. وعلى كل حال، فإنّ قانون الإشارات ليس أكثر غموضًا من مفهوم (نَفي النَّفي إيجاب) الذي نَعرفه جميعًا في اللغة.

طبّقَ العالِم الإنكليزي بول ديراك[36] Paul A.M. Dirac في سنة 1930 مبدأ الأعداد السالبة في دراسَته النظرية للفيزياء النووية، وخرجَ بنظريةِ المادّة السَّلبية أو المادّة المُضادّة Antimatter كما تُسمى هذه الأيام. تَنبّأ ديراك بوجود جُسيم بسيط يُمكن تشبيهه بالإلكترون السالب، وحَسب نظريته، فإنّ هذا الجُسيم له كتلة تساوي كتلة الإلكترون، ولكنّ شحنته الكهربائية إيجابية بدلًا مِن أنْ تكون سَلبيةً مِثل الإلكترون، وأنه إذا وُجِد هذا الجُسيم بالقُرب مِن الإلكترون، فإنّهما يفنيان بعضهما فورًا. أَطلَق ديراك اسم البوزيترون Positron (الإلكترون الموجِب) على هذا الجُسيم الذي كانت أغرب صِفاته هي تلك العلاقة المُتنافِية مع الإلكترون، وكانت هذه الصِّفة هي ما تصوّره ديراك عمّا يُمكن أنْ يَحدث لجُسيم عاديّ مِثل الإلكترون عندما يلتَقي بِنَقيضِه، وذلك مِثلما يَحدث عند إضافة (-10) إلى (+10) والنتيجة سَتكون صفرًا وانعِدامًا بالطبع. في سنة 1939 تأكّدت نظريةُ ديراك بكلّ جوانبها عندما اكتشَف الفيزيائي الأمريكي كارل أندرسون[37] Carl D. Anderson وجودَ البوزيترون، ومنذ ذلك الحين ثَبتَ وجودُ البوزيترون في عديد من التجارب المخبرية، بل ووجود عددٍ آخَر مِن الجُسيمات المضادَّة للجُسيمات الذرّية المَعروفة، مِثل البروتون Proton والنيوترون Neutron، وهكذا تُعتبر المادةُ المضادَّة الآن جزءًا مهمًّا مِن العالَم الطبيعي، مَثلها كَمَثل الأعداد السالبة في عالَم الجَبر. توجَد المادة المضادَّة بوفرة في عالَم الجُسيمات الذّرية، ولكنها تكاد تكون معدومة الوجود في ظروف الحياة العادية على هذا الكوكَب، ويَتوقَّع بعضُ علماء الفضاء والفلَك وجودَ نجوم، بل ومجرات كاملة مِن المادة المضادَّة في هذا الكَون الفسيح. والآن على الرغم من أنّ النظريات العلمية تتَّفق على أنّ المادة المضادَّة في العالَم الفيزيائي هي تَجسيدٌ للسَّلبية في عالَم الرياضيات، إلا أنها تختلف في تفسير "السَّلبية" في هذا النوع من المادة.

حَسب نظرية ديراك، يتعلّق التفسير بالطاقة، إذ يقول ديراك إنّ وجودَ بوزيترون له طاقَة إيجابية هو التَّجسيد الفيزيائي لِعدم وجودِ إلكترون له طاقَة سَلبية، أي أنّ البوزيترونات بكلمة أخرى مَعقولة بشكلٍ إيجابي، مثلما أنّ عدم وجود أي صوت هو صَمتٌ مؤكَّد بشكل إيجابي.

أما ريتشارد فينمان[38] Richard Feynman، الفيزيائي الأمريكي الحائز على جائزة نوبل، فيقول إنّ "سَلبية" المادة المضادَّة تتعلَّق بالزمن، وهو يقول إنّ البوزيترون الذي يتحرَّك إلى الأمام في الزمن، يُكافئ الإلكترون الذي يتحرَّك إلى الوراء في الزمن، ويعني بالتحرُّك إلى الأمام التحرُّك في الاتِّجاه الإيجابي، والتَّحرك إلى الوراء تحرُّكًا في الاتِّجاه السَّلبي، وعلى الرغم من وجود بعض المميزات في فكرة فينمان، إلا أنّ العلماء لا يملكون مِن الأدلّة ما يكفي لِتفضيل نظريةٍ على أخرى، ولكنّ كِلتا النظريتَين تَستخدِمان مبدأ الكَميات السَّلبية. ومِن الصحيح القول، إنّ جُسيمات المادة المضادَّة هي تَجسيدٌ فيزيائي للأعداد السالبة في الرياضيات.

كانت الأعداد السالبة مبهَمة بالنسبة لعلماء الجَبر في القَرن السادس عشر، مثلما كانت كومات القشّ التي رسمَها كاندينسكي Kandinsky مبهَمةً بالنسبة لِلرسامين في القَرن التاسع عشر. وكانت الأعداد التَّخيُّلِيَّة Imaginary Numbers أكثَر غموضًا وإبهامًا بالنسبة لعلماء الجَبر في القَرن السادس عشر، مثلما كانت تَكعيبية بيكاسو Picasso غامِضة بالنسبة لِرسَّامي القَرن العشرين. الأعدادُ التَّخيلية هي أعدادٌ ليست سالبة وليست موجبة...! ولكنها أعدادٌ فَرَضَتْ نفسَها على علماء الجَبر عندما ظَهرتْ أثناء حلّ بعض المعادلات الجَبرية.

لنأخُذ مثلًا المعادلة الجَبرية العادية (س * س = 4) وهذا يعني أن (س^2 = 4). تُحَلُّ هذه المعادلة عندما تساوي (س) الجَذر التربيعي للعدد 4، وهو العدد 2 أي (س = 2)، لأنّ العدد 2 هو العدد الذي إذا ضُرِب بنفسِه كان الناتج 4، أو بالتعبير الجَبري: العدد 4 هو مُربَّع العدد 2، وبالعكس فإنّ العدد 2 هو الجَذر التَّربيعي للعدد 4، أي (√4= 2). وفي المعادلة الجَبرية (س^2 = -1) تكون قيمة (س) التي تَحلُّ هذه المعادلة هي س = 1 - √ أي الجَذر التربيعي للعدد (1 -)، وهو عددٌ ليس سالبًا وليس موجبًا! لأنّ حاصِل ضرب عدد موجب بنفسِه هو عددٌ موجب دائمًا، كما أنّ حاصِل ضرب عدد سالب بنفسِه هو عدد موجب دائمًا حَسب قانون الإشارات، وهكذا فإنّ قيمة (س) في هذه المعادلة هي عددٌ ليس سالبًا وليس موجبًا..!

عندما لاحَظ علماءُ الجَبر هذا في القَرنَين السادس عشر والسابع عشر، كان عليهم أنْ يتَصوَّروا العدد 1 - √ على أنه عددٌ غير معقول وغير منطقي، وقد أطلَق ديكارت على هذا العدد وأمثاله مَن الجُذور التربيعية للأعداد السالبة اسم "الأعداد التَخَيُّلِيّة"، ووَصَفها عالِم الرياضيات الألماني غوتفريد لايبنيتز[39] Gottfried Leibnitz بأنها *"نفَحات رائعة مِن روح الإله"*. كانت هذه التسميات والأوصاف المبهَمة هي كلّ ما استطاع علماء الجَبر تَقديمه في ذلك الوقت، لأنه لم يَكن لدَيهم أي تفسير منطقي لهذه الأعداد التَّخيلية، ولم يستطيعوا أنْ يتفهَّموا ما يعنيه جَمع وطَرح

وضَرب وتقسيم هذه الأعداد، لأنه لم يكن لدَيهم أي نموذج مَبدئي لها. ولذا، لم يكُن لديهم أي سبب للاعتقاد بأنّ هذه الأعداد التَّخيلية هي جزء منطقي معقول مِن عِلم الجَبر.

ولكن، في سنة 1797، اكتشفَ عالِم المَساحة النرويجي كاسبر ويسل[40] Caspar Wessel طريقةً لِتوضيح الأعداد التَّخيلية، واعترَف علماءُ الجَبر أخيرًا بأنّ الأعداد التَّخيلية لها مكانتَها في عِلم الجَبر إلى جانب الأعداد الحقيقية (مجموعة الأعداد السالبة والموجبة). كان مفتاح اللّغز هو في تصوّر الأعداد التَّخيلية على أنها موجودة في بُعْدٍ آخَر يَختلفُ من الناحية الرياضية عن البُعد الذي توجَد فيه الأعداد الحقيقية. أي بكلمة أخرى، إذا تصوَّرنا أنّ الأعداد الحقيقية هي بمَثابة تَدريجاتٍ أو أرقام على مِحوَرٍ عموديّ، فإنّ الأعداد التّخيلية هي بمَثابة تدريجات أو أرقام على مِحوَر أفقيّ. استطاع ويسل بهذا التمثيل النموذجي البسيط أنْ يفسِّر كيف يمكن توسيع مفهوم الجَمع والطرح والضَرب والتقسيم لِكي يَشمل الأعداد التَّخيلية في عِلم الجَبر. فمثلًا إنّ جَمع عدد حقيقي إلى عدَد تخيُّليّ يختلفُ عن جَمع عددَين حقيقيين، وهو يُشابه التوفيق بين التدريجات العمودية والتدريجات الأفقية، والنتيجة ليسَت حاصِل جَمع عدديّ، وإنما هي إحداثياتٌ لِنقطة على سَطحٍ ما.

يمكن تحديد كلّ نقطة على سطح الأرض، أو على خريطة، بحسب إحداثياتها العمودية والأفقية، أي حَسب خطوط الطول والعَرض، وهكذا حَسب فرضيات ويسل، فإنّ العلاقة بين الأعداد الحقيقية والأعداد التَّخيلية يمكن أنْ تُفسَّرَ تمامًا بتصوُّرِ سَطحٍ يشبه سَطحَ خريطَةٍ تُحدَّدُ عليه كلّ نقطةٍ بِزَوجٍ مِن الأعداد: عددٌ تخيليٌّ يُقاس على المِحور العمودي (أو الطولي)، وعددٌ حقيقيٌّ يُقاس على المِحور الأفقي (أو العَرضي)، وأطلَق ويسل على هذا السَّطح الرياضي اسم: المستوي المركَّب Complex plane.

بعد مرور مئات السنين على اكتشاف ويسل، طَبَّق ألبرت أينشتاين Albert Einstein ومعاصِروه مبدأ الأعداد التَّخيلية في دراساتهم للزمن والمكان، وكانت إحدى نتائجهم هي النظرية الخاصة في النسبية Special Theory of Relativity التي تمّ التعامل فيها مع المكان والزمن على أنهما بُعدان فيزيائيان مختلفان يُمثِّلان خطوطَ الطول والعَرض في الكَون. وهذا يعني أنّ كل نقطة في الكَون لا يُمكن أنْ تُحَدَّد بدقَّة إلا إذا تمّ تحديد مَوقِعها المكاني والزمني. يَنسَجم هذا الجزء من النظرية مع التجربة الواقعية العادية، فعندما نُريد ترتيبَ مَوعد لِمقابلة شخصٍ آخَر، لا بد مِنْ أنْ نَحرص على توضيح مكان وزمن اللقاء. وفقَ هذه النظرية، فإنّ الخريطةَ الصحيحة الوحيدة للكَون هي الخريطة التي يُقاس فيها البُعد المكاني بالأعداد الحقيقية، ويُقاس فيها البُعد الزمني بالأعداد التَّخيلية. وهذا يعني أنّ الكَون هو تَعبيرٌ فيزيائي عن المُستوي المركَّب في عِلم الجَبر، وقد أكَّدت جميعُ التجارب التي أُجرِيَت على صحّة هذه النظرية. بَعدما طرَح أينشتاين سنة 1905 النظريةَ الخاصة في النسبية، أظهرَت القياساتُ المخبرية أنّ الكَون هو مكانٌ تَكونُ فيه دقَّات الساعَة المُتحرِّكَة أبطَأ مِنْ دقَّات الساعة السَّاكِنة، وتَتقلَّص فيه الأجسامُ في البُعد الذي تَتحرك باتِّجاهه. وهذه هي صِفات وخواص الكَون الذي يَصفُه عالَم الرياضيات.

عندما تُضاف الأعداد التَّخيلية، يمكن فَهم عِلم الجَبر التقليدي منذ أنْ درَسه الفراعنة، كَعِلم محدَّد يضمّ الأعداد الموجبة والأعداد السالبة والأعداد التَّخيلية معًا في نوعٍ واحِد من الأعداد التي يُمكن أنْ نسميها: الأعداد التقليدية Traditional Numbers، وأنْ نقول: إذا جُمعَت الأعدادُ التقليدية أو طُرِحَت أو ضُرِبت أو قُسّمت فإنّ الناتج سَيكون عَددًا تقليديًّا. ولا يعني هذا أنّ عِلم الجَبر قد أصبح عِلمًا راكِدًا جامِدًا منذ سنة 1797 حين اكتشَف ويسل نظريته في الأعداد التَّخيلية. فمنذ القَرن التاسع عشر، اخترعَ علماءُ الجَبر أنواعًا جديدة من الأعداد لِيلعَبوا بها. واستَنبطوا أنواعًا جديدة من عِلم الجَبر المُجرَّد Abstract Algebra، وكلّ نوعٍ مِن هذه الأنواع من الأعداد هو نَوعٌ مستقلٌّ قائم بذاته، ففي كلّ نوعٍ من أنواع عِلم الجَبر المُجرَّد، استُبْدلتْ الأعدادُ التقليدية بأعداد مُجرَّدة Abstract Numbers لا تُشبه الأعداد التقليدية إلا في أنها يُمكن أنْ تُجمع وتُطرح وتُضرب وتُقسّم بطريقة منطقية محدَّدة. يمكنكَ أنْ تتَصوَّر مثلًا أنّ الأعداد الموجبة والسالبة والتَّخيلية بالنسبة لأنواع عِلم الجَبر هي بمَثابة العروق البَشرية بالنسبة للأنواع الحيوانية، وهكذا يختلفُ كلُّ نوعٍ من أنواع الأعداد المُجرَّدة عن الأعداد التقليدية، وعن بقية أنواع الأعداد المجرّدة، مثلما تَختلفُ الفِيلَةُ أو الزرافات أو الأسودُ عن البَشر.

منذ عام 1840 انطلَق علماء الجَبر في تخيّلاتهم لأنواع مِن عِلم الجَبر المُجرَّد يمكن تسميتها بأنواع الجَبر الخارِقة التَّجريد: ففي الأعداد التقليدية والمُجرّدة، لا يهمّ ترتيبُ الأعداد في عملية الضَّرب، إذ تكون النتيجة واحدة في كلّ الحالات، فمثلًا 2 * 3 = 6 وكذلك 3 * 2 = 6 تُسمَّى الأعدادُ التي تَنطِبق عليها هذه الصِّفة في عِلم الجَبر (الأعداد الاستِبدالية Commutative Numbers). وتُعتَبر الأعدادُ المجرَّدة والأعداد التقليدية كلَها أعدادًا استِبدالية. ولكنّ الأعداد الخارقة التَّجريد Super-abstract Numbers ليست استِبدالية، وهي بذلك تُعتبر أكثَر غَرابة وبُعدًا عن تجربتنا وعن مَعرفتنا بالأعداد. ولكنّ كثيرًا من هذه الأعداد الجَبرية المُجرّدة والخارقة التَّجريد قد وَجدتْ لها تطبيقًا عمَليًّا ناجحًا في وَصف الحقائق، مَثلها في ذلك كمَثل الأعداد التقليدية، حتى أصبحَ مبدأ التَّعدد مَبدأ مقبولًا وواقعًا ثابتًا في اختراعات واكتشافات عِلم الجَبر.

تَبَيّنَ أنّ أحَد أنواع هذه الأعداد الجَبرية الخارقة التَّجريد ويُسمَّى: المَصفوفات Matrices هو بالضبط ما احتاج إليه العلماء لِوَصف الظواهر الفيزيائية في الذَّرَة وأجزائها.

اختُرعتْ المَصفوفات سنة 1860 مِن قِبل عالِمَي الرياضيات الإنكليزيَّين جيمس سيلڤستر[41] James J. Sylvester وآرثر كايلي[42] Arthur Cayley. بَعد ذلك بحوالي سِتين سنة، استخدَم عالِم الرياضيات الألماني ڤيرنِر هايزنبيرغ[43]

Werner Heisenberg المَصفوفات في وَصف نظرية كاملة عن خواصّ الأشياء داخِل الذَرَّة. عُرِفَتْ نظريةُ هايزنبيرغ بنظرية الميكانيك المَوجي (أو الكَمّيّ) Quantum Mechanics، وعلى مرِّ عشرات السنين منذ أنْ طُرِحتْ هذه النظرية، أثبتَت التجاربُ العديدة صِحة توقُّعاتها، حتى شَهِدَ

أغلبُ العلماءُ بصِحتها. إنها نظريةٌ مَشحونة بفرضياتٍ ثورية جديدة عن عالَم الذَرَّة، وتتعلّق كلٌّ مِن هذه الفرضيات ببَعض الخواص الجَبرية للمَصفوفات. فمَثلًا إنّ عدم خضوع المَصفوفات للاستِبدال في عملية الضرب يتعلَّق بالفرضية التي تقول بأنه إذا أَحدَثتْ طريقةُ القياس تغييرًا مهمًّا في صِفات الشيء الذي يَخضَع للقياس، فإنّ إجراءَ القياسات في تَتابعٍ وتَسلسلٍ محدَّد يُصبح أمرًا مهمًّا لا بد منه للوصول إلى نتائج صحيحة، وإذا طبَّقنا عمليةَ الضَّرب على مَصفوفتَين أو أكثَر، فإنّ النتائج ستكون مختلفة حَسب الترتيب والتسلسل الذي تمّت فيه عملية الضَّرب. أي مِثل قولنا إنكَ إذا تذوَّقتَ شيئًا مِن العَصير في كأسٍ أولًا، ثم وَزَنتَ الكأسَ ثانيًا، فإنك ستحصَل على وزنٍ يختلفُ عن الوزنِ الذي تَحصل عليه فيما لو وَزَنْتَ الكأسَ أولًا، ثم تذوَّقتَ العَصير ثانيًا.

تَصَوَّر العلماءُ قَبْل الميكانيك الكَمّيّ أنهم يستطيعون مراقبةَ ودِراسة العالَم الفيزيائي مِن حولهم دون أنْ يُثيروا فيه أي اضطرابٍ إذا كانت دراسَتهم لطيفة حَذِرة، وهذا صحيحٌ فيما يتعلَّق بكثير من الظواهر في العالَم الطبيعي، ففي عالَم حياتنا اليومية العادية مثلًا، لا تَختلفُ النتائج إذا أصغَى الطبيب إلى دقَّات قلبِنا أوّلًا، ثم قاسَ حَرارتنا ثانيًا، أو إذا فَعلَ ذلك بترتيبٍ مُعاكِس، ويستخدِم العلماءُ الأعدادَ التقليدية في وَصفِ هذه القياسات الاستِبدالية.

ولكن حَسب نظرية الميكانيك الكَمّيّ، لا يستطيع عالِمٌ قياسَ ظاهرةٍ في عالَم الذَرَّة، وأنْ يُهمِل التغييرَ الهام الذي يُسبِّبه هذا القياس. يُسمّى هذا المبدأ بمَبدأ هايزنبيرغ في عدَم التَّحديد أو عدم التأكُّد Heinsenberg Uncertainty Principle وهو يمثِّل تعبيرًا فيزيائيًّا عن بعض الخواص الجَبرية للمَصفوفات. وبكلمة أخرى، فإنّ محاولاتنا إدخالَ أصابِعنا في عالَمِ الأجسام المُتناهية في الصِّغر، سيُظهِر لنا دائمًا أنّ أصابِعنا ضخمة غليظة.

يُبيّنُ مبدأ تعدُّد النظريات في عِلم الجَبر وفي فروع الرياضيات الأخرى، أنّ التَّخيل والتَّصور في عِلم الرياضيات يمثّل حاسَّة سادسة. لو كان توافُق عالَم الفيزياء والطبيعة مع الأفكار والتَّصورات الرياضية توافُقًا نادرًا، فلربما أعَدْنا هذا التَّوافق إلى الصدفة المَحضة. ولكن في الحقيقة، إنّ هذا التوافق مُتكرِّر وواضِح! مما دفَع عالِم الرياضيات الألماني الحائز على جائزة نوبل يوجين ڤيغنر[44] Eugene Wigner إلى القول إنّ للرياضيات كفاءَة مدهِشة في وَصف الحقيقة.

لا أعتقد أننا نَخترع أفكارًا ونظريات تتَّفقُ بالصدفة مع وَصفِ الظواهر الفيزيائية والطبيعية، بل يبدو أنّ الخيال في عِلم الرياضيات هو حاسّة أخرى نُراقِبُ مِن خلالها العالَم الطبيعي، وهي حاسَّةٌ مُرهَفَةٌ ذات كفاءة رائعة، لأنها غالبًا ما تُدرك الحقائق قبل أنْ تُدركها علومنا. إذا نظَرنا إلى الأمور بهذا المنطق فإنّ التوافق بين الظواهر الطبيعية وعالَم الرياضيات يصبح واضحًا وضوحَ التوافق بين الظواهر الطبيعية وبين السَّمع والبصر والشَّم واللمس بحيث يمكن اعتبار هذا التوافق دليلًا على صحة هذه الفرضية، وأنّ جميع حواسِّنا تَتضافَر وتتَّفق مع بعضها لأنّ كلًّا منها تَنقل صورةَ جانبٍ من الجوانب المختلفة لِحقيقة واحدة.

عندما أتصوَّر أنّ التخيل في عِلم الرياضيات هو بمَثابة حاسَّة سادسة، يقودُني هذا بشكل طبيعي إلى التفكير فيما إذا كان من الممكن أنْ نَعتَبر قدرةَ الإنسان على التَّخيل بشكلٍ عام بمَثابة حاسَّة أخرى. وإذا كان هذا صحيحًا، فيمكننا أنْ نَعتبر أنّ عرائس البحر والأشباح والعفاريت وكلّ ما تصوّره خَيال الإنسان هي مخلوقاتٌ سيتمّ اكتِشافها ذات يوم، أو ربما كانت هذه الصُّور والتخيلات بمَثابة جُنوحٍ في حاسَّتنا السادسة يَقودُ إلى خِداعنا أحيانًا، مثلما يَقودنا البصَر أحيانًا إلى الاعتقاد بوجود أشياءَ غير موجودة في الحقيقة. وإذا كان هذا الاحتمال الأخير صحيحًا، فربما كان هنالك شيءٌ خاصّ يتعلَّق بالخيال في الرياضيات وعقلانيته ومنطقيته بحيث يكون هذا الخَيال الرياضي أقلّ تعرُّضًا للجُنوح والشَّطط والأوهام، وهذا ما يفسِّر سَبب تحقُّق كثير من اختراعات الرياضيات في الواقع العلمي والطبيعي.

إذا وُجِدتْ هذه الحاسَّة السادسة "الرياضية" بالفعل، فربما أخبَرنا علماء الأحياء المعاصِرون أنها تطوَّرت مِن حواسّ الحيوانات الأخرى لكي تزيد من قدرتنا على البقاء والمحافظة على النوع البشري، كما قال عالِم الأحياء الفرنسي الحائز على جائزة نوبل فرانسوا جاكوب François Jacob: *"إدراكُ الحقيقة هو ضرورة حيوية"*. إذا كان التَّخيل الرياضي هو حاسَّتنا السادسة، فإنّ الأعداد التقليدية والمجرَّدة والخارقة التَّجريد في عِلم الجَبر ليست مجرَّد ألعاب لِعلماء الجَبر، ولكنها وسائل تساعدنا على إدراك العالَم مِن حولنا بصورة أكثَر دقَّة، وأكثر صوابًا... بل هي وسائل ضرورية لِبقائنا على قيد الحياة.

[أنواع الأعداد في الرياضيات]

نوع الأعداد:	أمثلة:
الصحيحة Whole or Natural	1، 2، 3، 4...
الأعداد الموجبة Positive (أكبَر من الصفر)	1، 2، 3، 4...
الأعداد السالبة Negative (أصغَر من الصفر)	-1، -2، -3، -4...
الأوَّلية Primary (لا تقسم بدون باقٍ إلا على نفسها أو على 1)	2، 3، 5، 7، 11، 13، 17...
الكَسرية أو العادية Rational	1، 2/1، 3/2، 2/2، 4، 73/25...
اللامعقولة Irrational	2، √π
الحقيقية Real	سلسلة الأعداد الكَسرية والصفر والأعداد اللامعقولة
التَّخيلية أو المُعقَّدة Imaginary (Complex)	-√1، -√2...
المُجرَّدة Abstract وهي أعداد استبدالية في العمليات الحسابية	كل الأعداد بذاتها دون أي معدود
الخارقة التَّجريد	المَصفوفات 2 5 8 9 Matrices 7 5 4 3

وهي أعداد غير استِبدالية Super-abstract في العمليات الحسابية	**3 11 0 1**
ما بَعد اللانهائية Trans-finite	$\aleph, \aleph_0, \aleph_1 \ldots_2$
ما بَعد ما بَعد اللانهائية Trans Trans-finite	$\beth, \beth_0, \beth_1 \omega \ldots_2$

[المترجم]

التَّناظر المُجرَّد Abstract Symmetry: نظرية المجموعات Group Theory "أيها النمر الذي يَحترقُ ضياءً

في غابات الليل،

أيّةُ يَدٍ أو عَينٍ خالِدة

تستطيع أنْ تتصوَّر تَناظركَ المُخيف؟".

ويليام بليك William Blake من كتاب "أغاني المُعاناة Songs of Experience"

لو أتى إلى الأرض زائرٌ من الفضاء، لَلاحَظَ فورًا أننا مخلوقاتٌ بصَرية، ويَظهر هذا واضحًا في طريقة بناء المُدن في هذا الكوكَب. يُصمِّمُ المهندسون المعماريون الأبنِية بمَداخل مُقنطَرة، ونوافِذ ذات مَرايا أو ألوان أو تزيينات مختلفة... وتُشير كلّ التفاصيل إلى أهمية مَظهر البِناء بالنسبة للمهندس. وعندما يلاحِظ الزائر الفضائي سَيطرةَ ووضوحَ التَّناظر في أشكال البِناء والإنشاءات المختلفة، سَيدركُ أننا مخلوقاتٌ متطورة أيضًا في تصوِّرها للجَمال.

يُشبه هذا الموقف حالتَنا عندما نراقِب الطبيعة ونَدرس بِناءها وتكوينها، فعندما نَدرس الأرضَ والكَون مِن حولنا بكلّ ما لدَينا مِن حواسّ فضولية، فإننا نتصرَّف مِثل ذلك الزائر الذي جاء من الفضاء. في البداية، اعتمَدنا فقط

على حواسِّنا الخَمس. ولذا، تأثَّرنا بالتَّناظر الواضِح في عالَم الطبيعة، مِثل التَّناظر البصَري في نَجمِ البحر، والتَّناظر السَّمعي في شَدو الطيور. وفي الخمسين ومئة سنة التي مضتْ، امتلَكنا حاسَّةً إضافية تساعدنا على إدراك التَّناظر المُجرَّد، ذلك التَّناظُر الذي لا يُمكِن إدراكه إلا بالعقل فقط. تَوصَّلنا إلى هذه الحاسَّة من خلال نظرية المجموعات، وهي الدِّراسة الرياضية للتَّناظر، فمِن خلال هذه النظريات، تبدو الطبيعة الآن أكثَر تَناظرًا، وأكثَر جَمالًا مِن أيّ وقتٍ مَضى.

يَرجِع اختراع نظرية المجموعات إلى إيفاريست غالوا[45] Evariste Galois الفرنسي السريع الغضب الذي قُتِل ولمّا يبلغ العشرين مِن عمره في خلافٍ تافِهٍ بشأن فتاة...! في سنة 1829، كتَب غالوا وهو في السابعة عشر مِن العمر رسالَته الأولى في حلِّ المُعادَلات الجَبرية من الدرجة الخامسة، وقادَه هذا البحث مباشرةً إلى نظرية المجموعات.

الجَبر هو عِلمٌ رياضيّ يَدرس العلاقات بين الأعداد. والمُعادَلات الجَبرية هي وسائل التعبير عن هذه العلاقات. إذا نظَرنا إلى المُعادَلات على أنها في الجَبر مِثل الجُمَلْ في اللغة، فإنّ حلول المُعادَلات هي بمَثابة الصِّفات في اللغة، والمُعادَلة الجَبرية من الدَّرجة الخامسة هي بمَثابة جُملةٍ لغوية تضمُّ خَمس صِفات. تَرِدُ المُعادَلات الجَبريةِ في دَرجات مختلفة، ويرتِّبها علماء الرياضيات وفقًا لذلك. ومثلما يَعكس عدد الصِّفات في جُملةٍ لُغويةٍ دَرجَةَ تَعقيدِ الفكرة التي تُعبِّر عنها

هذه الجُملة، فإنّ دَرجة المُعادَلة الجَبرية تَعكس دَرجة تعقيد العلاقة العددية التي تُعبِّر عنها المُعادَلة. وبالتالي، فإن العلاقات العددية التي اهتمَّ بها غالوا كانت على درجةٍ عاليةٍ من التعقيد، بحيث كانت تحتاج إلى خمسة حُلول لِوَصف كلٍّ منها.

في رسالته الأولى، بحَثَ غالوا عن طريقة منظَّمة للوصول إلى هذه الحلول لكي يتخلَّص من الطرق العشوائية التي لَجأ إليها علماء الجَبر حتى ذلك الوقت حين كانوا يتخبَّطون وكأنهم فقهاء لُغة يحاولون التوصُّل إلى كلّ الصّفات دون اللجوء إلى أي قاموس.

قبل ذلك الوقت، توصَّلتْ جهودُ العلماء إلى اكتشاف طرائق منظَّمة لِحلِّ المُعادَلات الأقل تعقيدًا، فمثلًا توصَّل البابليون إلى طريقةٍ منظَّمة لِحلِّ المُعادَلات من الدرجة الثانية، كما توصّل علماء الرياضيات الإيطاليون: سيبيوني ديل فيرو Scipione del Ferro ونيكولو فونتانا Niccolò Fontana ولودوفيكو فيراري Lodovico Ferrari في القَرن السادس عشر إلى طرائق حَلِّ المُعادَلات من الدرجة الثالثة والرابعة. منذ ذلك الوقت، لمْ يتوصَّل أحَد إلى طريقة منظَّمة لِحلِّ المُعادَلات من الدرجة الخامسة أو أكثَر. كانت رسالة غالوا الأولى محاولةً نبيلةً، ولكنها لم تكن ناجِحة. بعد ذلك بسنتَين، قَدَّمَ اكتشافَين تاريخيَّين هامَّين: كان الاكتشاف الأول أنه لا توجَد طريقة منظَّمة لِحلِّ المُعادَلات من الدرجة الخامسة أو أكثَر (أي لا يوجَد قانون معيَّن مِثل قانون المُميِّز الذي نتَبعه لِحلِّ المُعادَلة من الدرجة الثانية)، والاكتشاف الثاني هو أنّ بعض هذه المُعادَلات لها حلولٌ تتألف من أعداد تختلف عن الأعداد المألوفة في عِلم الجَبر آنذاك. تُسمَّى هذه الأعداد الآن "الأعداد المُبهَمة" Transcendental Numbers وفي مِثالنا في التَّشابه بين الجَبر واللغة، يمكن اعتبار هذه الأعداد مثل صِفات مكتوبة بلغة مختلفة.

يمكن فَهم الجزء الأخير من اكتشاف غالوا بأنه عندما تَصِل أفكارُنا وتخيّلاتنا إلى درجةٍ عالية من التعقيد، يصعب علينا أنْ نُعَبِّر عن هذه الأفكار تمامًا بلغة واحدة. قد تبدو هذه النتيجة لِبعض الناس، مثل الشعراء متعدّدي اللّغات، أمرًا بديهيًّا. أما بالنسبة لنا نحن الآخرين الذين نحاول جاهدين عبَثًا البحثَ عن الكلمة الصحيحة، فإنّ هذا صَعب الفَهم والتصوّر. وعلى كل حال، فإنّ الأفكار الرياضية في هذا الجانب من اكتشافات غالوا هي التي رشَّحتْهُ لكي يُعتبر بحقّ مؤسِّسَ نظرية المجموعات. لقد لاحظَ أنّ حلول المُعادَلات من الدرجة الخامسة تختلف عند دراسَتها حسبما إذا كانت كلها أعدادًا جَبرية أم لا. فإذا كانت أعدادًا جَبرية، فإنّ تبادلها وتعويضها في المُعادَلة يؤدي إلى مُعادَلة أخرى معقولة من الناحية الجَبرية، مثل المُعادَلة الأصلية، كقولِنا في اللغة: إنها امرأة سَمينة وغنية وعنيدة وبَخيلة، حيث يظلُّ المعنى واحِدًا إذا غيَّرنا ترتيبَ هذه الصِّفات. أما إذا كان أحَد الحلول عددًا مبْهَمًا، فإنّ تبديلها وتعويضها يؤدي إلى مُعادَلة غير معقولة، كقولنا في اللغة: إنه رَجلٌ بلجيكيّ سَمين وغني ومَغرور وعنيد، بحيث إننا إذا بدّلنا مكان صِفة "بلجيكي" تصبح الجُملة غير سليمة لغويًّا.

على الرغم من أنّ غالوا نفسه لم يَعِش طويلًا حتى يَشرح ويفسّر كل أبعاد اكتشافاته في الرياضيات، إلا أننا ندرك الآن أنها ترتبط بمَفهوم التَّناظر. هذا الارتباط الذي يشكِّلُ قاعدةً أساسية في نظرية المجموعات هو ارتباطٌ مُجرَّد يمكن توضيحه من خلال تأمل التّناظر ذي الزوايا الخَمس في حيوان نَجم البحر: تَخيَّل أنّ نَجم البحر قد وُضِع بحيث تتَّجِه إحدى أذرعِه إلى الأعلى، يُنبئِنا عالِم

الرياضيات أننا إذا دَوَّرنا نَجم البحر بمقدار الزاوية صفر، أو الزاوية 72 درجة، أو 144 درجة، أو 216 درجة، أو 288 درجة، فإنّ هذا الحيوان يظهَر تمامًا في مَظهرٍ مماثل لِمَظهره في الوضعية الأولى عندما أشارت إحدى أذرعِه إلى أعلى. تَرجِع هذه الخاصِّية من خواص شَكل نَجم البحر إلى كَونِه متناظرًا، وهي ظاهرةٌ يسمّيها علماءُ نظرية المجموعات ظاهرة "عدم التَّغيُّر في مجموعةٍ مِنَ الدَّورات".



[المترجم: نَجم البحر الطبيعي المتناظر لا يتَغيَّر مَظهَره العام عند تَدويره].

إذا تصوّرنا الآن أنّ أذرع نَجم البحر تَحمل أرقامًا من الواحِد حتى الخمسة، عندها يُصبح من الواضح أنّ تَدوير نَجم البحر بمقدار إحدى زوايا تَناظُرِه الثابتة يمكن أنْ يُرمَز إليها تَجريدًا بتَغيير الرَّقم الذي تَحمله أذرعه بالتَّبادل، وهكذا عندما نُدوِّر نَجم البحر بزاوية قدرها 72 درجة مثلًا، فإنّ هذا التدوير يمكن أنْ نُعبِّر عنه بالأرقام بقولنا: الرقم واحِد يذهَب إلى اثنَين، واثنَين يذهَب إلى ثلاثة، وثلاثة يذهَب إلى أربعة، أربعة يذهَب إلى خمسة، وخمسة يذهَب إلى واحد. بهذه الطريقة المجرّدة في وَصف الأمور، يمكن القول إنّ تناظر نَجم البحر لا يتَغيَّر في مجموعةٍ من الدَّورات، وأنه لا يتغيَّر ضمن مجموعة مِنَ الأرقام المتبادلة. هذا التعبير المُجرَّد هو ما رَبطَتْ به نظريةُ المجموعات تَبادلَ الأرقام مع التناظر، وأنّ اكتشاف غالوا في الحلول الجَبرية يعني إدراكَ أنّ بعض العلاقات العددية يمكن أنْ تكون متناظرة تناظرًا يشبه التناظر الطبيعي في شكل نَجم البحر الطبيعي.



[المترجم: نَجم البحر المُشوَّه يكون غير متناظر، ويتغيّر شكله العام عند تَدويره].

وفق نظرية المجموعات، فإنّ هذه العلاقات العددية المتناظرة هي بالضبط ما تَصِفه المُعادَلات الجَبرية من الدرجة الخامسة التي تكون حلولها أعدادًا جَبرية، ولا تحتوي حلولها على أي عدد مُبهَم. وبشكل آخر، تُبيِّن نظريةُ المجموعات أنّ هذه المُعادَلات تتضمَّن تناظرًا يشبه تناظر شكل نَجم البحر، لأنَّ إجراء تبادل بين الحلول الخمسة لهذه المُعادَلات لا يُغيِّرُ من معقولية الحَلِّ الجَبري للمُعادَلة. باختصار، هذه المُعادَلات متناظرة كَتناظر شكل نَجم البحر، لأنها ثابتة لا تتغيَّر بالتبادل العددي، مثلها في ذلك كَمثل نَجم البحر الطبيعي المتناظر.

وبالمقارنة، فإنّ العلاقات العددية التي تَصِفها مُعادَلاتٌ جَبرية من الدرجة الخامسة ذات الحلول التي تحتوي أعدادًا مُبهَمة هي علاقاتٌ غير متناظرة، وكأنما هي نَجمُ بَحرٍ له أذرع موزَّعة بشكل عشوائي غير متناظر. فإذا وضَعنا نَجم البحر المُشوَّه هذا بحيث تتَّجهُ إحدى أذرعه إلى الأعلى، فلَن يمكننا تَدويره في أي زاوية بحيث يظلّ محافظًا على شكله وتناظره الأصلي، إلا إذا أعَدناه إلى وَضعه الأصلي بعد دَورة كاملة، وهكذا يَفقد نَجمُ البحر المُشوَّه تناظرَه، ويفقد خاصّية عدم التغير في مجموعة من الدَّورات أو الأرقام المتبادلة. وهكذا حَسب نظرية المجموعات، فإنّ العلاقات العددية التي تصِفها مُعادَلاتٌ جَبرية من الدرجة الخامسة ذات الحلول التي تحتوي على أعداد مبهَمة هي علاقاتٌ غير متناظرة، مثلها كمَثل نَجم البحر المُشوّه الذي يمكن إدراك عدم تناظره بسهولة عن طريق المشاهَدة المباشرة، بينما يكون عدم التناظر الموجود في تلك المُعادَلات الجَبرية هو عدمُ تَناظرٍ عقليٍّ مُجرَّد لا يمكن إدراكه بسهولة عن طريق المشاهَدة المباشرة. إنّ عدم التناظر الموجود في تلك المُعادَلات الجَبرية هو عدم تَناظرٍ ذهنيٍّ مُجرَّد لا يمكن إدراكه إلا من خلال فَهم نظرية المجموعات، وهذا ما يجعل من نظرية المجموعات حاسَّة إضافية حقيقية، أدركَ العلماءُ من خلالها كَم فاتَهُم مِن جَمال التناظر في الطبيعة عندما لم يَستخدِموا سوى حواسِّهم الخَمس في تأملاتهم ودراساتهم مِن قَبل. لقد تمكَّنوا بنظرية المجموعات من إدراك التناظر في الظواهر والأشياء بدراسة المُعادَلات الرياضية التي تَصِفها. وبشكل عام، إذا تَبيَّنَ أنّ أمرًا في مُعادَلةٍ جَبرية يَظلُّ ثابتًا غير

متغيّرٍ في مجموعةٍ من الأرقام المتبادلة، فإنّ ما تَصِفه هذه المُعادَلَة لا بد مِنْ أنْ يكون متناظرًا، سواءً كان هذا التناظر حقيقة فيزيائية، أو تناظرًا عقليًّا مُجرَّدًا.

يَستخدِم علماءُ الفيزياء نظريةَ المجموعات في تصوّر الأشكال المتناظرة المختلفة التي تضمّها نظرياتهم عن الذَرَّة. حَسب هذه النظريات، تَتكوَّن الذَرَّة مِن نَواة تُحيط بها هالَة مِن الإلكترونات بشكل كُرة أو كُرات متداخِلة، أو أجراس، أو أشكال متناظرة أخرى. كما يَستخدِم علماءُ الكيمياء نظريةَ المجموعات في تصوّر التناظر على مُستوى الجُزيئات، فقد اكتشَفوا مَثلًا أنّ شكل الجُزيء يمكن أنْ يؤثِّر كثيرًا على خصائصه الكيميائية والفيزيائية، وأنّ الجُزيئات ذات التناظر الذي يشبه المكعَب لها طَعمٌ ورائحةٌ تختلف عن الجزيئات ذات التناظر الذي يُشبه الهرَم...!

لعل أهم الاكتشافات التي تَمخَّضَتْ عن نظرية المجموعات هو ذلك الذي بَيَّن لنا وجودَ التناظر في الكَون نفسه. وعلى الرغم من أنّ تناظر الكَون هو تناظرٌ في المكان والزمان، وكلاهما كميةٌ يمكن قياسها، إلا أنّ هذا التناظر لا يبدو واضحًا حتى ولو استطعنا أنْ نَنفصِل عنه بطريقة ما، ونظَرنا إليه عن بُعد. حَسب نظرية المجموعات، فإنّ تناظر الكَون هو تناظرٌ يتعلَّق بقانون حفظ الطاقة وكمية الحركة (كمية الحركة هي كمية فيزيائية تتعلَّق بحركة الأجسام)، وينصُّ هذا القانون، الذي يَعتقد الفيزيائيون بأنه قانونٌ يَشمل الكَون كلّه، على أنّ الكمية الكلية للطاقة وكمية الحركة في الكَون لا تَنقص ولا تزيد على الرغم من كلِّ التغيرات الظاهرية التي تَحدُث فيه. حَسب نظرية المجموعات، فإنّ قانون حفظ الطاقة وكمية الحركة هو ظاهرةُ ثَباتٍ أو عدم تغيُّر في جِسمٍ متناظِرٍ هو الكَون. وإذا أردنا أنْ نستخدِم مُعادَلةً تشمل كلّ كمية الطاقة وكمية الحركة في الكَون في لحظة ما، فإننا سنَجد أنّ هذه الكمية لن تتغيَّر من لحظة إلى أخرى. وبكلمة أخرى، إنّ كمية الطاقة وكمية الحركة في الكَون لا تتغيَّر بتَغيير قيمةِ المُعادَلة في لَحظَةٍ ما بقيمتِها في لَحظة أخرى، وحَسب نظرية المجموعات، فإنّ ظاهرةَ الثبات هذه مع تبادل الأرقام تعني أنّ الكَون متناظر بشكل مُجرَّد.

إنّ قدرتنا على تصوّر وتخيّل أمور مِثل تناظر الكَون تزيد إحساسنا بجَمال الكَون ورَوعَة القوانين الطبيعية التي تُسيِّره، حتى ولو لم يكن هذا الجَمال ظاهرًا لأعيُننا، وهكذا فإنّ نظرية المجموعات تمنَحُنا إحساسَ الفنان الذي يَدرس العالَم بانفِعال وتفاعل، لا كمراقِبٍ مجرَّدٍ مِن الإحساس. فنحن نجِد المتعَة والسعادة في إدراك التناظر في الطبيعة، مثلما نجِدها في تناظر بيوتِنا. كم سيبدو لنا الكَون أقلَّ جَمالًا وإثارة لو كنَّا كما قال الأديب الألماني هيسّه Hesse: "*شعراءَ بلا كلمات، ورسَّامين بلا ألوان، وموسيقيين بلا أصوات*...!" ويمكنني أنْ أُضيف: "*وعلماءَ رياضيات بلا نظرية المجموعات*...!".

عالَم من الإمكانات المتعددة: البُعد Dimension "ليس الأفق شيئًا سوى حدود إبصارنا".

روسيتر ريموند Rossiter Raymond من كتاب "صلاة الوداع"

"نعم، ولكنه رَجُلٌ ذو شخصية مَحدودَة ذات بُعد واحد...!" سَمعتُ هذا التعليق الساخر الذي وصِف به أحَد رجال الأعمال الناجحين في إحدى الحفلات، وتذكرتُ قصة إدوين آبوت Edwin Abbott: "الأرض المنبسِطة Flatland". حتى في تلك البلاد الخيالية ذات البعدَين، تُعتبر الشخصيات ذات البُعد الواحد شخصياتٌ مُحتقَرَة: الشخصيات ذات البُعد الواحد هي الخطوط المستقيمة، وكل الشخصيات الأخرى هي من المضلَّعات المستَوية ذات البُعدَين.

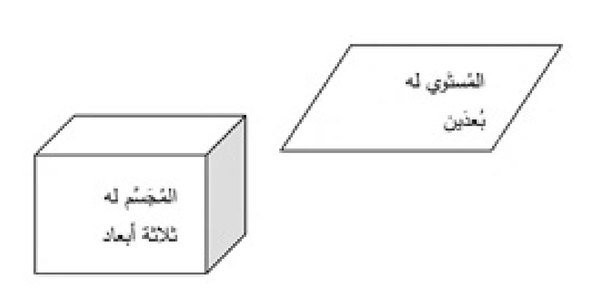
لا أستطيع أنْ أصِف رَجُل الأعمال ذاك بأنه شخصيةٌ ذات بُعد واحد، لأنّ التجربة والخبرة تعلِّمُنا أننا كلما ازددنا معرفة بِشخصٍ ما أو بشيء ما، ازداد تركيبه وتعقيده. وبكلمة أخرى، اتَّضَحتْ لَنا أبعادٌ جديدة فيه. هناك دليلٌ آخَر على أنّ البُعد أو الأبعاد تتعلَّق بِعَين المراقِب نفسه. يَعلَم الدَّارسون لِعِلم النفس أنّ الطفل الذي يَحبو على لَوحٍ زجاجيّ شفّاف لَن يَتردَّد في الزَّحف والسقوط عن حافّة هضبة عالية، لأنه لا يخاف من المرتفعاتِ، فهو لا يميّزها لأنّ عالَمه هو عالَم ذو بُعدَين فقط، ولن يتمكَّن هذا الطفل من إدراك المرتفعات ورؤية العالَم بشكلٍ صحيح حتى يستطيعَ إدراك أنّ العالَم له أبعاد ثلاثة وأربعة.

على مرِّ التاريخ، استطاع إدراكُ الإنسان وبشكل تدريجي أن يمنحَ الإنسانَ تصوّرًا للعالَم تزايدت أبعاده وتَنامَت على مرِّ العصور. في البداية، كان إدراكُنا وتصوّرنا للعالَم متخلفًا جدًّا عن تصوّر الرياضيات للأبعاد، أما في سنوات النصف الثاني من القَرن الماضي، فقد حدَثتْ تطوراتٌ واسعة في قضيةِ الأبعاد وتصوّرها في الرياضيات إلى درجة أنّ علماء الرياضيات في أيامنا هذه يَتحدَّثون دون تَردّد، وبكل هدوء، عن عوالِم لانهائية الأبعاد، وعن أجسام ذات أبعاد كَسرية. وبِناءً على هذه التطورات، يمكننا أنْ نتصوّر كَم سَيبدو لنا الكَون فسيحًا بعد قَرنٍ من الزمن.

منذ ألفَي سنة، تصوَّر الإغريقيون الكَونَ على أنه ذو أبعاد ثلاثة، وقد استندَ هذا التصوّر على إدراك الحَواس، وعلى نظريات إقليدس في الهندسة. شاهد الإغريقيون مِنْ حولِهم ما نراه نحن مِنْ حولنا هذه الأيام: عالَمٌ مليء بأشياء وأجسامٍ لها طول وعَرض وارتفاع. ولذا، كان مِنَ المعقول بالنسبة لهم أنّ الكَون الذي يحتوي هذه الأجسام له أيضًا طولٌ وعَرض وارتفاع. حَسب نظريات إقليدس، فإنّ الطول والعرض والارتفاع تُوافِق ما وَصفه بالأبعاد في لغة الرياضيات. في هندسة إقليدس، يتمتَّع المستقيم بصِفة واحدة هي الطول، ولذلك يُعتَبر المستقيمُ المثالَ النموذجي للجسم ذي البُعد الواحد، في حين يُعتبر المُستَوي الذي يتمتّع بصفتَي الطول والعرض المثالَ النموذجي للجسم ذي البُعدَين، ويُعتبر المُجَسَّم الذي يتَّصِف بالطول والعرض والارتفاع مثالًا للجسم ذي الأبعاد الثلاثة. وهكذا فقد انسَجمَت الرياضياتُ في عهد إقليدس مع الحواسّ والعقل في تأكيد الانطباع الذي حملَه الإغريقيون عن الكَون ذي الأبعاد الثلاثة.

[المترجم:]

المستقيم له بُعد واحد



[المترجم:]

استمرّ الناسُ في تصوّر الكَون بأبعاد ثلاثة على مرِّ العصور بَعد إقليدس، وقد رُفِض كل حديث عن احتمال وجود بُعد رابع، لأنه حديث غير معقول منطقيًّا ورياضيًّا. وقد نفَى عالِم الرياضيات والفلَكي الشهير بطليموس Ptolemy في الإسكندرية فكرةَ وجود بُعدٍ رابع، وأيَّد نظريته هذه بتِبيان أننا نَستطيع رَسمَ ثلاثة مَحاور مُتعامِدة في الفراغ، ولكننا لا نستطيع رَسمَ مِحور رابِع متعامِد مع كلٍّ منها أيضًا. وعلى الرغم من ذلك، فقد كان هنالك مَنْ تحدَّث عن احتمال وجود بُعد رابع، ولكنّ هذا الاحتمال كان أقرَب إلى الأساطير والأوهام بسبب عدَم وجود دَليل منطقيّ أو رياضيّ عليه. وقد أصرَّ الفيلسوف الإنكليزي هنري مور Henry More في القَرن السابع عشر على وجود الأشباح، وأنها كائناتٌ تعيش في البُعد الرابع، ولكنّ مِثل هذه المناقشات كانت تَفتقِد إلى الإثبات العلمي. ولذلك، لم يكن لها أي تأثير يُذكَر على الانطباع السائد بأنّ الكَون له أبعاد ثلاثة فقط وفقَ هندسة إقليدس. كان تأثيرُ هذا الانطباع قويًّا في عَهد هنري مور إلى درجة أنه عندما توسَّع عالِم الرياضيات الفرنسي رينيه ديكارت[46] في لغة هندسة إقليدس إلى دَرجةٍ أظهَرتْ رياضيًا احتمالَ وجودِ بُعدٍ رابع، رَفض ديكارت نفسه هذا الاحتمال على أنه احتمال غير حقيقي.

تَختلفُ هندسةُ ديكارت عن هندسة إقليدس بأنه عَرَّف الأبعاد في المستقيم والمستوي والمُجسَّم بطريقة غير الطول والعرض والارتفاع. حَسب نظرية ديكارت في الهندسة التحليلية Analytical Geometry فإنّ أبعاد جِسمٍ ما تَتعلَّقُ بِعددِ الإحداثيات التي نَحتاجُ إليها في رَسمِه وتحديده. فمثلًا يُعتبر المستقيم ذو بُعد واحد لأننا نستطيع رَسمَهُ وتَحديده باستِخدام إحداثياتٍ على مَحور واحد. فإذا تصوَّرنا المستقيمَ على أنه شارعٌ مثلًا، فإنّ كل نقطة على المستقيم، أو كلّ بيتٍ في هذا الشارع، يمكِن تحديده بِعَددٍ واحد فقط. والمستوي الذي يُمكِن مُقارَنته بالأرض المنبسطة، هو ذو بُعدَين لأننا نَحتاج إلى مِحورَين لِرَسم أيّ شَكلٍ فيه، وكلّ نقطةٍ على المستوي، مِثل كل نقطة على أرض منبسِطة، يُمكِن تحديدها بِعدَدَين مِثل خطوط الطول والعرض. وبالمِثل فإنّ المُجَسَّم له ثلاثة أبعاد، لأننا نحتاج إلى إحداثياتٍ على مَحاور ثلاثة لِرَسمِه وتَحديده. يُعتَبر تعريف ديكارت للأبعاد إنجازًا هامًا في ذلك الوقت، ليس لأنه أفضَل مِن تعريف إقليدس، ولكن لأنه كان كمّيًّا وليس نوعيًّا،

ولأنه اعتمَدَ على المنطق أكثَر من اعتماده على الحواسّ. استندَ إقليدس على فهمِنا وإدراكنا لِصِفات الأشكال (الطول والعرض والارتفاع)، في حين اعتمَد ديكارت على فهمِنا لِمَنطقٍ تحليليّ.

لو جاءت نظرية ديكارت في الهندسة التحليلية في وقتٍ أقلّ اعتمادًا على الحواسّ وعلى تفكير إقليدس، فلربما وافَق علماء الرياضيات بالإجماع على إمكانية وجود جِسم له أربعة أبعاد، ولن يحتاج ذلك لأكثَر مِنْ إدراكِ أنّ جِسمًا كهذا هو جِسمٌ ذو طبيعةٍ أو وجودٍ في عالَمِ الرياضيات، وأنه يحتاج إلى أربع إحداثيات لِرَسمِه وتَحديده. على الرغم من منطقية هذا الاحتمال، إلا أنه لمْ يكُن على درجة كافية من القوة والوضوح لكي يتغلَّب على تردُّد علماء الرياضيات في الموافقَة على مجرَّد احتمال وجود شيء لا يستطيعون رؤيته أو تصوّره. وبسبب سيطَرة حُجج وآراء مِثل آراء بطليموس، فإنّ الفكرة التي قدَّمتها الهندسة التحليلية عن احتمال وجود بُعد رابع في الرياضيات قد غابتْ عن ديكارت نفسه وعن معاصِريه وعن كثير مِنَ الأجيال بَعده، حتى قدَّم عالِم الرياضيات الألماني الشاب برنهارد ريمان[47] سنة 1854 تطويرًا جديدًا في هندسة إقليدس وفي هندسة ديكارت التحليلية، وبَيّن أنّ فكرة وجود بُعد رابع في الرياضيات هي فكرة ممكِنة، وبَيّن ذلك في تطويره لِنَظريةِ الهندسة التَّفاضُلية Differential Geometry (وهي نظرية كان قد استَنبطَها أستاذُه كارل فريدريك غاوس[48] Carl Friedrich Gauss). استخدَم ريمان أسلوبَ ديكارت في تعريف الأبعاد، ولكنه بدلًا مِنْ أنْ يرفض احتمال وجود بُعد رابع في الرياضيات، قام بتطوير هذه الفكرة وتوضيحها بالتفصيل.

بَيَّن ريمان إمكانيةَ وجود أنواع أخرى مِنَ الهندسة بالإضافة إلى هندسة إقليدس، أنواع مِنَ الهندسة تَصِفُ عوالمًا تُقابِل كل عدد صحيح مِنَ الصفر حتى اللانهاية. وأظهَر أنّ الكَون ذا الأبعاد الثلاثة الذي تَصِفُه هندسةُ إقليدس ما هو إلا واحِد مِنْ احتمالات أخرى كثيرة لا تقلّ عنه منطقيةً ووضوحًا.

تزداد الإمكانيات والاحتمالات في عالَمٍ ذي أبعاد أربعة عنها في عالَمٍ ذي أبعاد ثلاثة، وتبدو الحوادثُ التي تجري في عالَمِ الأبعاد الثلاثة لِشَخصٍ يعيش في عالَمِ الأبعاد الأربعة مُسطَّحةً ومَحدودة، مثلما تبدو لنا الحوادث التي تجري على شاشة السينما ذات البعدَين. وبالمِثل فإنّ تصوّر البُعد الرابع صَعبٌ بالنسبة لِشخصٍ يعيشُ في عالَم ذي بُعدَين مِثل شاشة السينما. وإنّ كلّ شيء يَدخل إلى عالَم الأبعاد الثلاثة مِنَ البُعد الرابع سَيبدو وكأنما أتَى مِنْ حيث لا مكان مِثل أشباح هنري مور...! وهذا يعني أيضًا أنّ الأشخاص في عالَم الأبعاد الأربعة يستطيعون مراقَبة أولئك الذين يعيشون في عالَمِ الأبعاد الثلاثة دون أنْ يَشعروا بهم، مَثَلهم كمَثَل المشاهدين الذين يراقبون تحركات الأشخاص في فيلمٍ سينمائي.

لم تكُن العوالم الأخرى التي وصَفَتْها رياضيات ريمان ذات أبعاد مكانية أو فراغية بالمعنى العادي للكلمة، كما هو الحال عند إقليدس وديكارت، فحَسب نظريات ريمان، لا يدلُّ البُعد في الرياضيات بالضرورة على حَجمٍ أو فراغ أو مكان يمكن إدراكه بالحواسّ، ولكنه يدلُّ منطقيًا على أفكار مجرَّدة سَمَّاها (المكان الهندسي المتعدّد الأبعاد Manifold). وقد حَرّر ريمان الهندسةَ بقفزاته

التحليلية نحو التَّجريد أكثَر مما فَعلَه ديكارت الذي حَرّر هندسةَ إقليدس مِنْ ارتباطها بالأبعاد الفيزيائية: الطول والعرض والارتفاع.

اتَّخذَ مفهوم المكان الهندسي المتعدد الأبعاد بعض الصِّفات الجديدة منذ وَصَفَهُ ريمان، إلا أنّ هذا المفهوم ما زال يدلُّ بشكلٍ عام على أي شيء، أو أي ذات، يتضمَّنُ وَصفها جوانب عديدة، أو أبعاد متعدِّدة، سواء كان ذلك سوق البورصة، أو الاقتصاد، أو الإنسان. تدلُّ كلمة المكان أو الفراغ لِمَن سَبِقَ ريمان مِنْ علماء الهندسة على ذلك الكَون الذي تَملؤه المجرّات والنجوم والكواكِب، في حين اتَّسَع مفهومُ المكان لدَى علماء الهندسة المعاصِرين لِيَشملَ مفهوم المكان الهندسي النظري المتعدد الأبعاد.

يجب علينا أنْ نؤكِّد هنا أنّ نظريات ريمان لمْ تكن ثورةً لغوية بسيطة فقط، لأنه عندما يُشير علماءُ الرياضيات الآن إلى سوق البورصة مثلًا على أنه مكان أو ذات متعدّدة الأبعاد، فإنهم يفكِّرون فيه على أنه مكانٌ هندسيٌّ تتحركُ فيه الأشياء وتَتصرَّف وفقَ نظريات رياضية محدَّدة، وأنّ أبعادَ هذا المكان الهندسي تَتحدَّد بِعدَدِ العوامِلِ التي تؤثِّر على مُجريات الأمور في سوق البورصة. وإذا تصوَّرنا أنّ سوقَ البورصة يتعلَّق بعامِلٍ مؤثِّر واحد فقط (مِثل طول ثوب المرأة...!) عندها نُمثِّلُ سوقَ البورصة رياضيًّا على أنه مكانٌ هندسيٌّ ذو بُعد واحد (أي مستقيم). وهذا يعني أنّ حالة سوق البورصة في أية لحظة يُمكن وَصفها بعَددٍ واحد (طول ثوب المرأة)، ويمكن التعبير عنها بنقطة واحدة في المكان الهندسي ذي البُعد الواحد.

حَسب هذا المنطق، يمكننا أنْ نَعتبر الإنسانَ مكانًا هندسيًّا ذا أبعاد كثيرة، بل ويستطيع بعضُنا القول إنّ الإنسانَ مكانٌ هندسيٌّ ذو عددٍ لانهائيّ مِنَ الأبعاد. تتأثَّر تصرفاتنا عادةً بِعددٍ كبير من العوامل يصعب تحديده، وإنّ تصرُّفًا بسيطًا مِثل ابتسامِنا عند الالتقاء بشخصٍ غريب قد يتأثَّر بعوامل كثيرة قد تبدو بعيدة العلاقة عن هذا التَّصرف، مِثل كمية النوم الذي اكتَسبناه في الليلة السابقة، ومِثل وقتِ اللقاء، وشعورنا تِجاه أزواجنا في ذلك اليوم، ووَضعِنا في العمل، وحالة الاقتصاد العامة، والفَصل الذي نحن فيه، وشَكل الشخص الذي نَلقاه... وهكذا. وليس غريبًا أنْ تتأثَّر بعضُ تصرفاتنا المعقَّدة بعوامل ترتبط بحالة الكَون كله.

يجب أنْ نُشفِق على علماء المجتمع، لأنّ أحد أسباب فشلهم المتكرّر مُقارنةً بعلماء الفيزياء هو أنّ موضوع بَحثِهم أكثَر صعوبة وتعقيدًا، بل وربما كان مستحيلًا إذا تصوَّرنا أنّ الإنسان هو مكانٌ هندسي ذو أبعاد كثيرة فوق العادة، وإنّ محاولةَ وَصفِه بمعادلات رياضية وعلمية هي محاولةٌ شاقّة وربما مستحيلة، تبدو أمامها محاولاتنا لِوَصفِ عالَمنا ذي الأبعاد الثلاثة محاولاتٌ سَهلة بسيطة قزمَة. وبالفعل فإنّ المجال الواسع الذي يَبحث فيه علماء الفيزياء، وهو الكَون، هو مِنْ أبسَط الأمكِنة الهندسية وأقلّها أبعادًا، إذ إنّ الكون حَسب نظريات أينشتاين هو مكانٌ هندسيٌّ ذو أربعة أبعاد (وليس ثلاثة كما تصوَّره الناسُ في الماضي). في سنة 1915 توصَّل أينشتاين بالاعتماد على تعريف ريمان الحُرّ التجريدي للأبعاد، إلى أنّ الكَون يمكن أنْ يوصَف بدقَّة على أنه مكان هندسيّ له ثلاثة أبعاد مكانية وبُعدٌ رابِع هو الزمن. ومِنَ المهم أنْ نُشير إلى أنّ مِثل هذا التأكيد لمْ يكن لِيَحمِل أي مَعنى في الرياضيات لولا توسّع ريمان في مفهوم الأبعاد إلى ما وراء الأبعاد المكانية مِنْ الطول والعرض والارتفاع، لأنّ البُعدَ الزمني لا يتمتَّع بصِفات الأبعاد المكانية، أي أنّ الزمن لا يمكن أنْ يُقاسَ

بمسطرة، أو بمقياس بُعدٍ كالأبعاد الثلاثة الأخرى. يَرسمُ أينشتاين الكَونَ على أنه مكانٌ هندسيّ له أبعاد أربعة مِنَ المكان والزمن لأننا نحتاجُ لِتحديدِ الكَون حَسب نظريات ريمان إلى ثلاثة أبعاد مكانية وبُعد رابِع زمني، وكلّ نقطة مِنْ نقاط الكَون يُمكِن تحديدها بثلاثة إحداثيات مكانية وإحداثية رابِعة زمانية. ويمكن تمثيل هذا بأننا إذا أرَدنا لِقاءَ صديقٍ يجب علينا أنْ نُحدِّد المكان والزمن، ويتضمَّنُ تحديدُ المكان دائمًا ثلاثة عناصر (مِثل قولِنا نلتقي عند تقاطع الشارع الخامس مع الشارع السادس والثلاثين على سطح الأرض). ويتضمَّن تَحديدُ الزمن دائمًا عنصرًا واحدًا (مثل قولِنا في الساعة الثانية عشرة). وهكذا يمكن القول إنّ أينشتاين قد بَرهَن على أنّ بطليموس لم يكُن مُخطئًا بشكلٍ كامل، لأنّ الجانب المكاني مِنَ الكون لا يتَّسِع فِعلًا لأكثَر مِنْ ثلاثة مَحاور مُتعامِدة.

يُبيِّنُ أينشتاين أنّ الكَون الذي نعيش فيه لا يُشبه الكَون الفراغي النظري ذا الأبعاد المكانية الأربعة، لأنّ الزمن هو البُعد الرابع في كَوننا. ففي ذلك العالَم النظريّ ذو الأبعاد المكانية الأربعة، لا يوجَد عنصر الزمن، وبالتالي لا يوجَد مَعنى لِمَفهوم الحركة كما نَعرفها، فالشَّخص في ذلك العالَم النظري ذي الأبعاد المكانية ـ الزمانية الأربعة يمكن أنْ يكون في كلّ مَوضع في الوقت نفسه مِن زماننا، بينما الشَّخص في كَوننا ذي الأبعاد المكانية ـ الزمانية الأربعة، لا يمكن إلا أنْ يكون في مكان واحِد في لَحظة معينة، وأنّ انتقاله مِن مكانٍ إلى آخر مُحدَّد بسرعته في الحركة (وقد وجَد العلماء أنّ حدود السرعة القصوى في الكَون هي سرعة الضوء وهي حوالي 186,000 ميل في الثانية، ونحن نتحركُ طبعًا بسرعات أقلّ مِن ذلك بكثير).

على الرغم من أننا قد احتَجنا إلى قَرنَين من الزمان لكي ندركَ أنّ الكَون الذي نعيشُ فيه ذو أبعاد أربعة، وأنه يحتوي على أشياء ذات أبعاد متعدِّدة ومتنوعة، إلا أننا احتَجنا إلى ستّين سَنة أخرى لكي ندركَ أنّ أبعادَ بعض الأشياء الأخرى في هذا الكَون ليست أعدادًا صحيحة...! ومرة أخرى كان أحَد علماء الرياضيات هو الذي لَفَتَ انتِباهَنا إلى ذلك.

في سنة 1975 قام بِنوا ماندِلبرو[49] Benoit Mandelbrot الذي عَمل في شركة IBM بجَمعِ ودراسة الأعمال المبدئية لِكثير مِنْ علماء الرياضيات، وبَيَّن أنه من المُمكن في الرياضيات تعريف الأبعاد الكَسرية، مِثل ¾ بُعد أو 1½ بُعد وهكذا...! في هذه الدراسة، بدأ ماندِلبرو بتعريفٍ للأبعاد كان قد قدَّمَه عالِم الرياضيات الألماني فيليكس هاوسدورف[50] Felix Hausdorff بعد ستّين سَنة من التعريف الذي قدَّمه ريمان. حَسب تعريف هاوسدورف، فإنّ المستوي العادي، مِثل هذه الصفحة، هو سَطحٌ ذو بُعدَين، لأننا نحتاجُ إلى ضَربِ عَددَين (طوله وعرضه) لِحساب مَساحَته، وبالمِثل فإنّ مُجَسَّمًا عاديًّا مِثل مكعَّب السُّكر له ثلاثة أبعاد، لأننا نحتاجُ إلى ضَربِ ثلاثة أعداد (الطول والعرض والارتفاع) لِحساب حَجمِه... وهكذا. تصوَّرَ هاوسدورف أنه باتّباع هذه القاعدة البسيطة، يمكِن تَصنيف كلّ الأشكال الهندسية الممكِنة ذات الأبعاد مِنَ الصفر وحتى اللانهاية. ولكنّ ماندِلبرو لاحَظَ أنّ علماء الرياضيات في الماضي قد توصَّلوا إلى أشكال لا يمكن تصنيفها حَسب هذه القاعدة، وقدَّم بعضَ النماذج على مِثل هذه الأشكال التي تَعتمد على ظواهر وأجسام طبيعية واقعية، مِثل ساحِل بريطانيا: تَصوَّرْ مثلًا شكلًا مستطيلًا أضلاعه مُشرشَرَة وغير منتظَمة، مِثل ساحِل الجزيرة البريطانية. حَسب تعريف هاوسدورف، فإنّ هذا المستطيل هو شكلٌ ذو بُعدَين، لأنّ مساحَته

يمكِن أنْ تُحسَب بِضَربِ طولِه بِعَرضِه. ولكنّ ماندِلبرو أوضَح أنّ تصوَّر هاوسدورف سَهل القول وصَعب التنفيذ، فمِنَ الصَّعب أنْ نَحسب بدقّة طوَل وعَرض هذا المستطيل، وهذا يقودُ إلى تَناقضٍ هو جَوهر الفكرة الأساسية في الأشكال ذات الأبعاد الكَسرية. إذا نظَرنا إلى هذا الشكل المستطيل عن بُعد، فإنّ أضلاعه تبدو مستقيمة، وربما استطَعنا تحديدَ طولَه وعَرضه، ولنَقُل أنّ طوله 20 مِيلًا وعَرضه 10 أميال، وبذلك تكون مَساحته 200 مِيلًا مربَّعًا. ولكننا إذا اقترَبنا مِن هذا المستطيل، يظهَر عدم انتظام أضلاعه، فإذا سِرنا بالسيارة على طولِ كلِّ خليجٍ وكلِّ رأسٍ وكلِّ تَعريجٍ فيه، تَبيَّن لنا أنّ طوله وعَرضه أكبَر بكثير مِنْ عشرة أو عشرين مِيلًا، وإذا قرأنا عدَّاد السيارة، فلربما وَجدنا أنّ طوله حوالي 30 مِيلًا، وأنّ عَرضه حوالي 15 مِيلًا، ومن الواضح أنّ هذا القياس هو أكثَر دقّة من القياس الأول الذي قُدِّر عن بُعد، ولكنْ إذا اتَّبعنا قاعِدة هاوسدورف، فسَنصِل في القياس الثاني إلى خَطأ زائد في حِساب مساحَة المستطيل التي سَتبلغ حوالي 450 مِيلًا مربَّعًا تقريبًا. وبالمِثل فإنّ قياس الطول والعَرض بالسيارة هو أقلّ دقّة مِن القياس الذي قد تقوم به مثلًا ذبابة صغيرة تَتبع كل تَعرّج صغيرٍ على طول وعَرض هذا السَّاحل...! ويستمرُّ ماندِلبرو قائلًا: *"مِنْ حيث المبدأ، يستطيع المرءُ اتباع هذه المنحَنيات إلى تفصيلات أكثر دقّة بتصوّر قياس يقوم به فأر ثم نملَة... وهكذا كلما التزَم السائر بتَعرجات وتفصيلات الساحل، ازدادت المسافة التي يقيسها إلى ما لانهاية"*، والتّناقُض المتضَمَّن في فرضية هاوسدورف هو أنه كلما ازدادت دقَّتُنا في قياس الطول والعَرض، ازداد خَطؤنا في حِساب المساحة...! أمثِلةٌ كهذا المستطيل وغيره مِنَ النماذج التي لا يَنطبِق عليها تصنيفُ هاوسدورف، أوحَتْ إلى ماندِلبرو في وقتٍ مبكر في دراسته، بأنّ تعريفَ هاوسدورف للأبعاد يجب أنْ يتَّسع لِيشمَل هذه الأشكال بشكلٍ أو بآخَر، وقد قادَتْهُ جهودُه التي بذلَها في تحقيق هذا الهدف إلى مَلء الفراغات في نظرية هاوسدورف في الأبعاد، بنظريةٍ رياضية عن الأبعاد الكَسرية.

وجَد ماندِلبرو أنه لدَى دراسة شكلٍ هندسيّ، كالمستطيل مثلًا، يَزول التَّناقض إذا لمْ نُصِرُّ على أنّ المساحة هي حاصِل ضَرب الطول بالعَرض، وحَسب نظريته، فإنّ الوَصفَ الصحيح الخالي مِنَ التناقض، والذي يوصِلنا إلى مساحة المستطيل، هو بألاّ نَضرب الرَّقمَين بشكلٍ مباشر، بل بأنْ نَضرب رَقمًا بالجَذر التَّربيعي للرَّقم الآخَر، وهذا يعني بالضرورة أنّ المستطيل هو شكلٌ هندسيٌّ ذو بُعدٍ ونصف (وهنا يشير نِصف البُعد إلى الجَذر التَّربيعيّ لِعدد، وبالمِثل فإنّ ثُلث البُعد يُشير إلى الجَذر التَّكعيبيّ وهكذا... ولذا، فإنّ ضَرب 1.5 مِن الأعداد يعني ضَرب عدَد بالجَذر التربيعي لِعَدد آخر). تَحمِلُ هذه الأعداد علاقةً بالطول والعَرض، ولكن ماندِلبرو عَرَّفها رياضيًّا بحيث إنها لَم تَعُد متعلِّقة بنسبيةِ المقياس الذي تَختاره، سواء كان قياسًا كَونيًّا، أو جُزيئيًّا، أو ذَرّيًّا، أو أصغَر مِن ذلك.

يوضِّح مِثال المستطيل ذي الأضلاع المتعرّجة كَتعرُّج ساحل إنكلترا كيف أنّ جِسمًا طبيعيًّا يمكن أنْ يُبيِّنَ التَّناقض في نظرية هاوسدورف في الأبعاد الصحيحة. وبالمِثل، فإنّ مكعبًا متعرِّج السطوح كَتعرُّجِ الدِّماغ البشريّ يمكن أنْ يوضِّح التناقض ذاته في الأجسام ذات الأبعاد الثلاثة. حَسبَ نظرية هاوسدورف، يُعتبر المكعب جِسمًا ذا أبعاد ثلاثة، لأنّ حَجمه يمكِن أنْ يُحسَب بِضَرب

أرقام ثلاثة: طوله وعَرضه وارتفاعه. ولكنْ، كما هو الحال في مثال المستطيل المتعرَّج، فإننا نَجد أنْ أكبَر القياسات دقّة لِهذه الأبعاد الثلاثة يؤدّي بِنا إلى خَطأ كبير وزيادة في حساب حَجم هذا المكعب، وقد وجَد ماندِلبرو أنّ المكعب أيضًا هو جِسمٌ ذو أبعاد كَسرية، وأنّ حَجمُهُ هو حاصِل ضرب 2.8 عددًا وليس ثلاثة أعداد، أي أنّ أبعاده 2.8 بُعدًا وليس ثلاثة أبعاد.

وجدَ ماندِلبرو أنّ كثيرًا من الأجسام المعروفة الأخرى هي أيضًا ذات أبعاد كَسرية، مِثل بلّورات الثلج، وحدود سفوح الجبال، وجهاز تبريد السيارة، والدماغ البشري، وأمعاء الإنسان... ففي كل مِنْ هذه الأجسام، كما هو الحال في مثالنا عن المستطيل والمكعب، يقودُنا وَصف هاوسدورف إلى تَناقضٍ في العلاقة بين سَطح أو حَجم الجسم، وبين طول أضلاعه أو جوانبه.

وقد وجَد ماندِلبرو أيضًا أنّ الأبعاد الكَسرية لِسطح الأرض تَختلفُ عن أبعاد سَطحِ المريخ حَسب القياسات التي أجراها على الصّور التي التقطَتها وكالةُ الفضاء الأمريكية لكوكَب المريخ. وقد وجَد أنّ سَطح الأرض له 2.1 بُعدًا، بينما سَطح المريخ له 2.4 بُعدًا. بالنسبة للعَين المجرَّدة، فإنّ الفرق الأساسي هو أنّ سطحَ الأرض يبدو أقلّ تعرُّجًا، وأنّ تَعرُّجاته أقلّ حِدَّة من تعرُّجات سطح المريخ. لعلَّ إحدى نتائج هذه الملاحظة هي أنه يمكن تمثيل كل سطح ممكِن عن طريق الكومبيوتر باستِخدام الأبعاد الكَسرية، وبالفعل فهذا هو بالضبط ما فَعلَه مُنتِجو فيلم ستار ترِك Star Trek II 2 في شركة بارامونت Paramount سنة 1981 لتصوير سطح الكواكِب الخيالية ذات الأبعاد الكَسرية المختلفة. وهكذا استطَعنا بفَضلِ نظرية ماندِلبرو في الأبعاد الكَسرية، أنْ ندركَ غِنى عالَمنا الأرضي بالأبعاد، وتميّزه الفريد. لقد أعطانا ماندِلبرو وريمان وديكارت، برؤيتهم الجديدة للطبيعة الرياضية للأبعاد، نظرةً جديدة إلى كَوننا الغني بالأبعاد بدلًا مِنْ ذلك الكَون المَحدود الثلاثي الأبعاد الذي تَملؤه أجسامٌ ذات بُعد واحد أو بُعدَين أو ثلاثة أبعاد فقط كما اقتَرح إقليدس، وهذا يَدفعنا إلى الاعتقاد بأنّ المستقبل سيكون تكرارًا للماضي، وأننا سنَستمرُّ في اكتشافِ وإدراكِ أبعاد جديدة أخرى في نَسيج الكون. كما يمكِننا أيضًا تخيُّل أنّ نَسيج الكَون سيبدو لَنا متأرجِحًا في المستقبل بين البساطة والتَّعدد، وكأن الكَون كُرة من الخيوط ونحن نتحركُ فيها. وهذا يذكّرني بفيلم "الرحلة العجيبة Fantastic Voyage" الذي يُصَغَّرُ فيه بعض العلماء إلى حَجمٍ صغير جدًّا، ويُدخَلون في جِسم إنسان بمركبة مصغَّرة جدًّا لكي يكتَشفوا ما بداخله...!

يمكن تشبيه رؤيتنا الأولى للكَون وكأننا نَنظُر إلى كُرةٍ مِنَ الخيوط عن بُعد كبير، تبدو الكُرةُ آنذاك نقطة لا أبعاد لها، وإذا اقتَربنا منها أكثر، ظَهرتْ وكأنها قَرصٌ صغيرٌ لَه سَطح أملَس، وعندما نَقتربُ أكثَر وأكثَر، يتَّضِح أنّ هذا القِرص إنما هو كُرة ثلاثية الأبعاد. ويبدو أننا الآن في تصوّرنا للكَون في مرحلة بَدأ يظهَر لَنا فيها غِنى وتَنوع النسيج الذي يشكِّل هذا الكَون. إذا كان الأمر كذلك فلربما نتَّجِهُ إلى فترةٍ تُشبه اختراقَ سَطح كُرةِ الخيوط، عندها سَيتغيّر مَظهَر النسيج الغني المتنوع المتعدد الأبعاد، إلى مَظهرِ فَراغٍ كبير، تَخترقُه خيوطٌ أو خطوطٌ ذات بُعد واحد، وعندما نَقترب مِنْ أحَد هذه الخطوط، سَنعود مِنْ جديد إلى رؤيةِ الأبعاد الثنائية، ثم الثلاثية لهذه الخطوط المتعرِّجة المركَّبة.

لا يمكِننا بالطبع أنْ نتَنبّأ أي من هذه الاحتمالات سيتحقّق فِعلًا في المستقبل، ويظلُّ السؤال فيما إذا كان عدد الأبعاد التي نُعطِيها للكَون ولِمحتوياته سيستمرّ في الزيادة باطّراد واستمرار، أم أنه سَيتأرجَح بين الزيادة والنقصان، ولكنه مِنَ المؤكَّد على كلِّ حال، أننا يجب ألا نَحكم على الكَون جُزافًا كما حُكِمَ على رَجلِ الأعمال ذاك بأنه شخصٌ ذا بُعدٍ واحد. ويجب ألا نُجزم في قراراتنا بشكلٍ نهائي قاطِع، لأنه إذا عَلَّمَنا هؤلاء العلماءُ الفطاحِل على مرِّ 2000 عام من الزمان شيئًا ما، فهو أنَّ الأبعاد إنما توجَد في العَين التي تَنظر، وفي العقل الذي يتأمَّل ويتدبَّر ويتخيَّل ويفكِّر.

جُهد كثير عن اللاشيء:

الصِفر والمجموعة الخالية

"رَتِّبْ ثلاثين قطعة من الخشب حول واحدة وأضفْ الفراغ الناتج إلى الغرض المقصود تحصل على الدولاب. شَكِّلْ عجينة من الصلصال لكي تصنع وعاء وأضف الفراغ الناتج إلى الغرض المقصود تحصل على الوعاء. فَصِّلْ الأبواب والنوافذ لكي تبني غرفة وأضف الفراغ الناتج إلى الغرض المقصود تحصل على الغرفة. وهكذا فإنّ ما نحصل عليه من أشياء مفيدة إنما يتحقق من استخدام الفراغ...!".

لاو تسو Lao Tzu يتمَّتَّع علماءُ الرياضيات بأنهم كانوا من أوائل الناس في التاريخ الذين أدرَكوا أهمية "العَدم"، وعَرِفوا الفَرق بين عدَم الوجود وإمكانية الوجود. وعلى الرغم من أنّ هذه الأمور تبدو كَمعلومات فارغة، إلا أنها كانت أمورًا خطيرة مهمة في تاريخ الرياضيات وعِلم دراسة الأعداد كما نَعرفُه اليوم. منذ حوالي 1100 أو 1400 سنة وَجَدَ العدم مكانَه الراسِّخ في عِلم الأعداد بكَونِه العدد "صفر". ظَهر هذا العدد وكأنه إضافة بسيطة إلى سلسلة الأعداد، ولكنّ هذا العَدد "صفر" منَحَنا القدرةَ على كتابة الأعداد بسهولة ووضوح. وبَعد حوالي 1300 سنة أخرى، ظهَر التَّعبير عن "إمكانية الوجود" في عِلم الأعداد، ولم يكُن هذا مشابهًا لعَدم الوجود، لأنّ إمكانية الوجود هي في الرياضيات ما يسمّى: المجموعة الفارغة أو الخالية Null Set، وهي مجموعَة تُمثِّل في عِلم الأعداد ما تُمثِّلُه صفحةُ ورقٍ فارِغة في الكتابة... إمكانيةَ وجود. وبواسِطة هذه المجموعة الفارغة، استطاعَ علماء الرياضيات أنْ يوضِّحوا كيف أنه يمكُن اعتبار كل عدد معروف في الحساب مُستنبَط مِنْ إمكانية الوجود. لم يَحدث قَبل ذلك ولا بَعده أنْ استطاع علماء الرياضيات تحقيق الكثير مِنْ قليل كما فَعلوا عندما حقَّقوا الكثير وهم يَبحَثون عن العدم. أَدخل الهندوس العدد صفر[51] إلى الوجود، وأطلَقوا عليه اسم سُنْيا Sunya (ويعني الخَلاء)، واستخدَموه في نظامِ أعدادهم بين القَرن السادس والقَرن التاسع قَبل الميلاد. ويمكِن اعتبار نظام الأعداد المعاصِر نظامًا مُنبَثقًا عن تلك الأعداد الهندوسية، وهو نظامٌ يُطلِق عليه علماء الرياضيات اسم (النظام العِشري في كتابة الأعداد Position Notation Decimal). في نظامِ كتابة الأعداد هذا، يُمكن التَّعبير عن أي عدد مهما كَبُر باستِخدام الأرقام الأساسية العشرة مِنَ الصفر إلى التسعة، بحيث إنّ مَوقِع كل رَقم في العَدد يُحدِّد قيمته الحقيقية،

فبالتعريف نقول إنّ الرَّقم الموجود في أقصى اليمين مِنَ العدد يدلّ على قيمته ذاتها (فمثلًا في العدد 8754 هذا الرقم هو 4)، والرقم الذي يليه إلى اليسار (الرقم 5) يدلُّ على عَشرة أمثاله، والرقم الذي يليه إلى اليسار (الرقم 7) يدلُّ على مِئة أمثاله وهكذا...

قَبل استعمال السُنْيا الهندوسية (الصفر)، كان علماء الرياضيات الذين يَستعمِلون النظام العِشريّ في كتابة الأعداد يضطرّون إلى تَركِ مسافات فارغة في الأمكِنة التي نَكتُب فيها الرقم صفر هذه الأيام، فمثلًا كانوا يَكتبون العدد سبعمائة وسَبعة بشكل: (7 7) بدلًا مِن (707)، وكان هذا يَقودُ أحيانًا إلى الغموض، خاصّة إذا لَم تُترَك المسافة الفارغة واضِحة بين الأرقام، مما أدّى إلى الاضطراب والإعاقة في تقدُّم عِلم الحساب.

كان الإنسان يَستخدِم طرائق وأنظمة عديدة مختلفة في كتابة الأعداد عندما قدَّم الهندوس نظامهم في كتابة الأعداد، ولمْ يُستخدَم الرقم صفر في أيّ من طرائق كتابة الأعداد قَبلهم، ولمْ يكُن لدَى أيّ مِن الطرائق السابقة طريقة أسهَل وأوضَح في كتابة الأعداد. فمثلًا كان هناك النظام الروماني في كتابة الأعداد الذي كان صَعبًا ومعقَّدًا كما يَعرِف كل مَن حاول تعلُّمه، فهو نظامٌ سَهل في كتابة الأعداد الصغيرة، أما في الأعداد الكبيرة، فتُصبح الكتابة الرومانية أُحجِية صَعبة الحلّ. فمثلًا إذا أرَدنا كتابة ألف وتسعمائة وثلاثة وثمانين بالنظام الروماني علينا أنْ نكتُب: MCMLXXXIII، ويبدو هذا معقّدًا بالمقارنة بالنظام الهندوسي لكِتابة الأعداد الذي يُكتَب فيه هذا العدد بالشكل 1983.

كان لدَى الإغريق أيضًا نظام وطريقة في كتابة الأعداد تشبه الطريقة الرومانية، ولكي نكتُب الرقم 1983 بالطريقة الإغريقية، علينا أنْ نكتب TNIIIAAA. ولذلك، فليس من الغريب أنّ عِلم الحساب تطوَّر بشكل كبير لدَى الهندوس، في حين لمْ يتطوَّر بسرعة لدَى الإغريق الذين تفوَّقوا في الهندسة (عِلم دراسة الأشكال). ويُشبه هذا قولنا إنّ تطوّر الشِّعر في حضارةٍ ما، يرتبط عادةً بقدرة لغة هذه الحضارة على التَّعبير.

إذا كان مفهوم "العدم" في الرياضيات قد منَحنا القدرة على كتابة الأعداد بدقّة ووضوح، فإنّ مفهوم "إمكانية الوجود" في الرياضيات قد منَحنا القدرة على توضيح الاستنباط المنطقي لِنَشأة الأعداد.

عندما طبَّق إقليدس منذ حوالي 300 سنة قبل الميلاد قواعد المنطق لكي يَستنتج نظرياته الهندسية انطلاقًا مِن فرضياتٍ قليلة، طُرِح السؤال فيما إذا كان من الممكِن تطبيق الأسلوب نفسه على نظريات الحساب والأعداد. وعندما حاول علماءُ الرياضيات الإجابة على هذا السؤال في أواخر القَرن التاسع، لمْ يستطيعوا الاتفاق على نقطة البداية. أرادَ بعضُهم أنْ يبدأ مِنْ اعتبار الأعداد الطبيعية الصحيحة (1، 2، 3، 4...) في الرياضيات بمَثابة الحروف الأبجدية في اللغة، ويَنطلِق مِن

ذلك في الاستنتاج والتركيب. بينما أرادَ آخرون، مِثل العالِم الألماني غوتليب فريجيه[52]، أنْ يبدؤوا بما هو قَبل ذلك، وأنْ يَستنتِجوا الأعداد الطبيعية الصحيحة نفسها من مبادئ أولية أبسَط.

أراد عالِم الرياضيات فريجيه أنْ يبدأ انطلاقًا من بديهيةِ مفهوم المجموعة. في الرياضيات كما هو الحال في أمور أخرى، تُعتبر المجموعةُ فئةً من الأشياء، أو كما قال عالِم الرياضيات الألماني جورج كانتور [53] الذي عاصَر العالم فريجيه: *"المجموعةُ هي عدة أشياء محدَّدة في إحساسنا أو تفكيرنا بحيث إنها مُعرَّفة ومنفصِلة"*. اعتقدَ فريجيه أنّ مفهوم المجموعة هو مبدأ أكثَر بَساطة مِن متتالية الأعداد الطبيعية، ولذلك قرَّر الانطلاق منه لكي يَستنتج هذه المتتالية، ومن ثَمّ باستِخدام فرضيات أخرى، يمكِنه استِنتاج كلّ عِلم الحساب. توصَّل باستِنتاجاته هذه من التمييز بين العدَم وبين إمكانية الوجود. يترکَّز هذا الفرقُ في مفهوم المجموعة. فإنّ إمكانية الوجود هي المجموعة الفارغة، أو المجموعة التي لا تحتوي على أيّ عدد. وقد رَمزَ إليها علماء الرياضيات بفراغٍ بين قوسَين: } { وكانت هذه المجموعة هي المجموعة الوحيدة التي يمكن أنْ يبدأ منها فريجيه، لأنّه انطَلَق أساسًا من افتراض عدم وجود أي عدد. وبالنسبة إلى فريجيه، فإنّ المجموعة الفارغة إنما تمثِّل اللحظة التي سَبقَت الخَلق والوجود، أو أنها إمكانية التَّحول إلى متتاليات لانهائية من الأعداد. وإنّ الرَّمز الذي استُخدِم في التعبير عن المجموعة الفارغة يوحِي بشيءٍ سَيكون، أو بشيءٍ سَيوجد: قوسان يَحصران بينهما فراغًا سَيمتلئ بمتتاليات مُتنامية من الأعداد } {.

[المترجم: يقصِد المؤلف هنا الإشارة إلى الفَرق الشاسع بين العدد (صفر) الذي يمثِّل العدَم، وبين المجموعة الخالية } { التي تُمثِّل إمكانية الوجود. وهذا يشبه حالَة صَفحةِ ورقٍ بيضاء كُتِب عليها العدد (صفر)، أو صفحة بيضاء فارغة تمامًا يمكن أنْ يُكتَبَ عليها أعداد أو أفكار أو رسوم بلا حدود لإمكانيات الوجود فيها].

بالمقارنة مع ذلك، فالعدم هو مجموعة يُعتَبر العددُ صفر هو العضو الوحيد الذي يَنتَمي إليها، وهذا ما يُعبِّر عنه علماءُ الرياضيات بالرمز: {0}، وهذه المجموعة هي أوّل تعبير، أو أوّل تجسيد ممكِن للإمكانيات الحسابية الكامِنة في المجموعة الفارغة } {، وهو أوّل عدد طبيعي: الصفر. أي أنّ مجموعة الصفر {0} هي تجسيدُ العدَم للمجموعة الفارغة، كما هو الحال في السَّكتَة أو لحظَة الصَّمت في الموسيقى التي تُعبِّر عن القدرة الكامِنة للموسيقى على عَزف الأصوات.

ربما كان التمييز بين العدم وبين إمكانية الوجود هو أمرٌ أصعَب في الأمور الأخرى التي تختلف عن الرياضيات. فمثلًا، عندما تأمَّلتُ مؤخَّرًا ذلك التمثال المشهور الذي نَحَتَهُ هنري مور والذي يَنتصِب أمام مدخل الجناح الشرقي للمتحف القومي للفنون في واشنطن، تَخيلتُ في الفتحة الوحيدة الموجودة في وَسَطه إمكانيةً لِوجود صُورٍ كثيرة، فكانت لا شيء وكلّ شيء في الوقت نفسه. وبهذا التَّصور، كانت مثالًا ونموذجًا للمجموعة الفارغة في الرياضيات. ولكنني لم أتصوَّر في الفراغات الموجودة في منحوتات أخرى كثيرة نموذجًا لإمكانية الوجود، بل رأيتُ فيها عدَمًا وثقوبًا فارغة.

يُعتَبر مفهومُ الخواء أو الفراغ الفيزيائي vacum مِنْ أصدَق النماذج الفيزيائية على المجموعة الفارغة. إنه المثال النموذجي الذي يُجسِّد إمكانيةَ الوجود بما فيه مِن إمكانياتٍ لِتوليد كميات مذهِلة من المادة. إذ يُمكن نظريًّا تَحريض التوليد الذاتيّ للجُسيمات النووية بوَضع الفراغ الفيزيائي في مَجالٍ كهربائي قوي. لمْ يتمكَّن العلماء حتى الآن مِنْ اختبار هذا التَّصور النظري للفراغ الفيزيائي بشكلٍ مباشر، لأن قوة المَجال الكهربائي اللازم تَفوقُ كل ما يُمكنهم توليدُه بالوسائل المُتاحَة هذه الأيام. وقد اقترحَ بعضُ علماء الفيزياء الذَرّية وعلماء الكيمياء مؤخَّرًا اختبارَ هذه النظرية باستِخدام المَجالات الكهربائية القوية الموجودة بشكلٍ طبيعي في الذَرَّات فوق الثقيلة، والمشكلة الوحيدة في هذا الاقتراح هي أنّ وجود هذه العناصر فوق الثقيلة هو وجودٌ افتراضي تَخمينيّ أيضًا. وهكذا لا يُمكننا التأكد مِنْ أنّ الفراغ الفيزيائي هو بمَثابة إمكانية الوجود فِعلًا كما يعتقد الفيزيائيون هذه الأيام، أم أنه بمَثابة العدَم كما تصوَّر فلاسفةُ الإغريق في الماضي.

يمكن اعتبار قصة الخَلق التي وردَتْ في التوراة نموذجًا جيدًا آخَر للمجموعة الفارغة، مَثلها كمَثل الفراغ الفيزيائي. وفقًا للكِتاب المقدَّس، يمكن اعتبار أنّ الله قد خلَق الكَون مِنْ لا شيء، مثلما أوجَد فريجيه متتاليةَ الأعداد الطبيعية مِنَ المجموعة الفارغة. ذَكرَت الراهبةُ هروفيتا غاندرسهايم Hrovita Gandersheim في مسرحيتها "الحِكمة Sapientia" في القَرن التاسع عشر: *"خَلَقَ الله العالم من لا شيء ونظَّم كل شيء بعددٍ وقياسٍ ووَزنٍ ثم بزَمَن، وقدَّر عمر الإنسان، وصاغ عِلمًا ما زال يُظهِر معجزات جديدة كلما ازدَدنا له فَهمًا ومَعرفة"*. اعتقدُ أنّ الراهبة هروفيتا يمكن أنْ تُدخِل الرياضيات ضِمن "عِلمها"، وأنْ تَعتبر استِخدام فريجيه لِمفهوم المجموعة الفارغة من "المعجزات الجديدة"، وإذا فَعلتْ ذلك، فيُمكنها أنْ تضيفَ معجزة أخرى جاءت نتيجةً لتطبيق مفهوم المجموعة الفارغة في عِلم الحساب، قامَ به العالم الرياضي الإنكليزي جون هورتون كونواي[54] John Horton Conway سنة 1973 عندما تابَع استِنتاجات فريجيه بدءًا مِنَ المجموعة الفارغة، ولم يَستنبط منها الأعداد الطبيعية فقط، بل وكلّ الأنواع المعروفة الأخرى مِنَ الأعداد، مِثل الأعداد الكَسرية، والأعداد غير العادية، بل وأنواع غامضة مِنَ الأعداد تسمى الأعداد السريالية أو فوق الواقعية Surreal Numbers.

في بَحثِه الذي لمْ يتَجاوز الثلاث عشرة صفحة تحت عنوان "كلّ الأعداد الكبيرة والصغيرة"، بدأَ كونواي، مثلما بدأَ فريجيه قَبله، بأفكار بسيطة قليلة تَشمل مفهوم المجموعة الفارغة وقاعدتَين أخريين، القاعدة الأولى تمثّل التعريف المنطقي للعَدد كما حدَّده كونواي، ويُمكن تصوّره كما لو أننا نَنظُر إلى موسوعَة تتألَّف من أجزاء عديدة مُرتَّبة على رَفٍّ في مكتَبة. بحَسب تعريف كونواي، فإنّ مكانَ جُزء معيَّن مِنْ أجزاء الموسوعة (أو رَقَمه) يُمكن أنْ يُحدَّد بمَعرفة مجموعةِ الأجزاء المرتَّبة على يَساره، ومجموعة الأجزاء المرتَّبة عن يَمينه، فمثلًا، يمكننا تحديد مكان الجزء التاسع بقولنا إنّ الأجزاء مِنْ صفر إلى ثمانية تقَع إلى يَساره، وأنّ الأجزاء مِنْ عَشرة إلى ما لانهاية تقَع إلى يَمينه، وهكذا فإنْ كلّ جزء، أو كلّ عدد، له مكانه الخاصّ الذي يَتحدَّد ويَتميَّز بالمجموعة

التي تقَع إلى يَساره والمجموعة التي تقَع إلى يَمينه. وهذا هو لُبُّ القاعدة الأولى التي وصَفها كونواي.

أما القاعدة الثانية، والتي يُمكن تمثيلها هنا أيضًا بمجموعةٍ مِنَ الموسوعات، فتَقضي بأنّ عددًا ما، مِثل العدد خَمسة، هو أصغَر مِنْ (أو يساوي) عددًا آخَر، مِثل العدد تِسعة إذا تحقَّق شَرطان: أولًا: أنْ تكون كلّ الأجزاء الموجودة إلى يَسار العدد الأول (5) أقلّ مِنْ تلك الموجودة إلى يَسار العدد الثاني (9)، وثانيًا: أنْ تكون كلّ الأجزاء الموجودة إلى يَمين العدد الثاني (9) أكبَر مِنْ تلك الموجودة إلى يَمين العدد الأول (5). هذه القاعدة لازِمة لكي يستطيع كونواي أنْ يحقّق ترتيبًا في الأعداد التي يَستنبطها بدءًا مِنَ الصفر: الصفر أقلّ مِنَ الواحد، ولذلك فالصفر يأتي قَبل الواحد، والواحِد أقلّ مِنَ الاثنين، ولذلك فالواحِد يأتي قَبل الاثنَين وهكذا. وبما أنّ كونواي لا يفتَرِض وجود أيّ عددٍ في البداية، فإنه مِثل فريجيه يَنطلِقُ بدءًا مِن المجموعة الفارغة، ويَستنبِط منها متتاليةَ الأعداد الطبيعية. يَبدأ كونواي بتصوُّر العدد الذي تُوجَد مجموعةٌ فارغةٌ على يَساره، ومجموعةٌ فارغة على يَمينه، ويَكتُب هذا العدد بالرموز هكذا: } {: } {، ويُسمّي هذا العدد: صفرًا. أي أنه حَسب نظرية كونواي كما هي الحال في نظرية فريجيه، فإنّ العدَم (الصفر) هو أبسَط تعبير أولي عن إمكانية الوجود. بَعد استِنباط العدد صفر، يُصبح لدى كونواي مجموعتَين يمكِنه استِخدامهما في استِنباط الأعداد وهما: المجموعة الفارغة } {، والمجموعة التي تحتوي على الصفر }0{. ثم يحدِّد كونواي العدد واحِد بأنه العدد الذي توجَد إلى يَساره مجموعةٌ تحتوي صفرًا، وإلى يَمينه المجموعة الفارغة. وهكذا ففي هذه المرحلة من استِنتاجات كونواي، [المترجم: يسير الحديث في الفقرة التالية وِفْقَ ترتيب الأعداد باللاتينية، أي من اليسار إلى اليمين، فيقع العدد واحد على يسار العدد صفر، ويقع العدد اثنين على يسار العدد واحد...] يكون العدد واحِد مَحصورًا بين الصفر إلى يَساره، وإمكانية الوجود إلى يَمينه، أي تُوجَد إلى يَساره إمكانيةٌ قد تَحدَّدتْ وتَحقَّقتْ (وهي الصفر)، وإلى يَمينه إمكانياتٌ لم تُحدَّد بَعد. وفي كلّ خطوة مِن خطوات خَلقِ الأعداد واستِنباطها لدَى كونواي، فإنه يُحدِّد دائمًا العددَ التالي على أنه العدد الذي تُوجَد إلى يَساره مجموعةُ كل الأعداد التي تمّ استِنباطها، وإلى يَمينه المجموعةُ الفارغة، وكأنّما كان يَستوحي ويَسترشد بمِثال المَوسوعات الآنِف الذِّكر. ففي كل خطوة يُوضَع الجزء الجديد الذي تمّ طَبعُه إلى يَمين كلّ الأجزاء السابقة التي نُشِرتْ قَبله ورُتِّبتْ على رَفِّ المكتبة ترتيبًا تصاعديًّا، وإلى يَساره مَجالٌ فارغ، يُشبه في مِثالنا هذا الفراغَ الفيزيائي، ويُمَثِّل إمكانيةَ وجود أجزاء أو أعداد أخرى ستأتي في المستقبل. وهكذا يَستطيع كونواي بالمتابَعة على هذا النَّسَق إلى ما لانهاية أنْ يَستنبط كل متتاليةِ الأعداد الطبيعية. ثم يُتابع كونواي استِنتاجاته ليتوصَّل إلى ما لانهاية له مِنَ الأعداد التي تقَع بين الأعداد الطبيعية، مِثل العدد الذي تقَع إلى يَساره مجموعةُ الصفر } 0 {، وإلى يَمينه مجموعةُ الأعداد الطبيعية الأخرى من الواحِد حتى اللانهاية (1، 2، 3، 4...). أي أنّ هذا يُحدِّد عددًا يقَع بين الصفر والواحِد، أو أنّ أجزاءً أخرى تَتداخَل بين أجزاء الموسوعات المرتَّبة على رَفِّ المكتبة...! ولا يقِف الأمر عند هذا الحدّ، بل يُتابع كونواي طريقته في الاستِنتاج المنطقي لإيجاد أعداد بين هذه الأعداد التي تَتداخَل بين الأعداد الطبيعية، ثم إيجاد أعداد أخرى بين هذه الأعداد البَيْنيَّة لمْ يُمنح لها اسم مِنْ قَبل في عِلم الرياضيات.

هناك جوانب شَكلية أخرى تفوقُ الوَصف في نظرية كونواي، فإنّ العقل الرياضي التقليدي يَنصُّ على أنّ حافَّة المسطرة التي تمثِّل متتاليةً من الأعداد، إنما هي متتاليةٌ من النقاط التي يُمكن تحديد كلّ منها بعَدد طبيعي، أو عَدد كَسريّ، أو عَدد غير عادي (مِثل 0.1345792000 حيث يستمرُّ تتالي الأعداد إلى ما لانهاية)، وتُشكِّل جميع هذه النقاط والأعداد استمرارًا دون وجود فراغ بينها، ولكنّ نظرية كونواي تَتطلَّبُ منّا أنْ نتَصوَّر وجود أعداد تَدخُل بطريقةٍ ما في الشقوق، أو الفراغات التي يَصعب تَصوُّر وجودها بين نقاطِ هذا الخطّ المستمرّ مِنَ الأعداد، بل وأنْ نتصوَّر أنّ أعدادًا أخرى تَدخل بين تلك الأعداد التي أدخَلناها في هذه الفراغات التي لا نَستطيع تَصوّرها، وهكذا وهكذا...! وبذلك أكَّد كونواي في نظريته ما كان يَتخيله آخرون قَبله أنْ ليس هناك حَدٌّ لِعَدد مرات تقسيم جِسم ما.

يُبيِّن بَحثُ كونواي "كل الأعداد الكبيرة والصغيرة" الإمكانيات غير المحدودة للمجموعة الفارغة، والإمكانيات الخارِقة للعقل البشري، وأنّ القدرة الخارقة عند الإنسان تشبه إمكانيةَ الوجود في كَونِها قدرة وإمكانية كامِنة، وهي جزء لا يُقهَر مِنْ كَونِنا أحياء كما أثبَتَت التجاربُ العديدة. إن الأشخاص الذين يُحرَمون مِنْ استخدام حواسهم بوضعهم في غُرف مظلِمة صامِتة مَغمورة في الماء يصابون بالهلوسة، وكأن العقل البشري لا يستطيع أنْ يَتحمَّل حِرمانَه القُدرة على خَلق شيءٍ مِنْ لا شيء، ولا سيَّما إذا أحاطَ به العدَم، أو أنّ العقلَ البشري، مَثله كمَثل الفراغ الفيزيائي، يمكن أنْ يُحَرَّض على خَلق أفكار تبدو وكأنها جاءَتْ من لا شيء. وقد أثبتَ علماءُ الرياضيات هذه الظاهرة، فقال عالِم الرياضيات الألماني كارل فريدريك غاوس[55] أنه حاول عَبثًا على مرّ سنوات عديدة أنْ يُبرهِن على نظريةٍ معيَّنة في عِلم الحساب، ثم بَعد عدة أيام مِنْ عدَم التفكير بها، جاءَهُ الحلّ ***"مِثل وَمض البَرق"***. وذكرَ عالِم الرياضيات الفرنسي هنري بوانكاريه[56] Henry Poincare أنه حاول جاهدًا لِشهور عديدة حلَّ مسألة، ثم بينما كان يتحدَّث إلى صديقٍ له في موضوعٍ آخَر ***"جاءَتني الفكرة بلا مقدِّماتٍ تُمهِّدُ إليها"***.

وهكذا يمكن اعتبار أنّ العقل البشري يُشبه المجموعةَ الفارغة في نظريةِ الأعداد التي وضعَها فريجيه وكونواي، وأنّ المجموعةَ الفارغة في الرياضيات إنما هي مِثالٌ شَكَّلَه العقل وخَلَقَه على صورَتِه ونمَطِه. وإذا كانت التجربة الخلاَّقة التي وَصفها فريجيه وكونواي تُشبه تلك التي مَرَّتْ على غاوس وبوانكاريه، فإنّ التقدُّم الذي حقَّقاه في عِلم الحساب إنما توصَّلا إليه بَعد التفكير والتأمل في اللاشيء والعدَم. ونحن مَدينون لِعقولهم الخلاَّقة في فَهم الفَرق الشاسِع بين العدَم وبين إمكانية الوجود.

المرحلة الثانية

التَّنازلات Compromising

لا شيء أفضَل مِن حُسن الفَهم:

الهندسة اللاإقليدية

"تهيأ بعض الصيادين للذهاب إلى صَيد الدُّببة، وبَعد أنْ نصَبوا خيامَهم، ساروا مِيلًا باتِّجاه الجنوب، ومِيلًا باتِّجاه الشرق حيث اصطادوا دُبًّا. وبعدما غَنِموا صَيدهم، عادوا إلى معسكرهم، وكان مجموع ما قطَعوه من مسافة هو ثلاثة أميال فقط. ما هو لَون الدُّب؟".

أُحجِية أمريكية

يَميلُ الإنسانُ إلى الحُكم على العالَم الطبيعي مِن حَوله وفقًا لِما تُمليه عليه العادة، قادَنا هذا في الماضي إلى الاعتقاد بأنّ الشمسَ هي التي تُشرق وتَغرب، وأنّ النجومَ تَدور حولَ الأرض، وأنّ الأرضَ هي مَركز الكَون، وأنّ الأرضَ مُسطّحة وليست كُروية. لم يكن التَّخلص من هذه المعتقَدات المتأصِّلة سَهلًا، خاصّة فيما يتعلّق بالاعتقاد السَّائد أنّ الكَون إنما هو امتدادٌ واستمرارٌ مماثِل لما هو موجود على الأرض مِن أحوال وظروف.

حتى بداية القَرن التاسع عشر، كان الاعتقاد السَّائد هو أنّ قوانين هندسة إقليدس سارِية وسائِدة في كل ناحية من نواحي الكَون، مثلما هي سَارِية هنا على سطح الأرض. وقد مَنحَنا هذا الاعتقاد شعورًا خاصًا بالراحة والألفة مع الكَون، وأَثبتَت العادةُ مرة أخرى عدم قُدرتنا في الوصول إلى الحُكم الصحيح على الأشياء.

يَستندُ إثباتُ خطأ هذا الاعتقاد إلى اكتشافٍ تمّ سنة 1824 أوضَح أنّ هنالك أنواع أخرى من الهندسة تَختلفُ جَذريًّا عن هندسة إقليدس، ولا تقلُّ عنها صِحَّةً في عِلم الرياضيات، ولكنها تَصِفُ أكوانًا تختلفُ في صُوَرِها عن الكَون الذي تَصِفُه قوانين هندسة إقليدس. بل أظهَرتْ هذه الأنواع الجديدة من الهندسة أنّ الكَون ليس خاضِعًا لما تَصِفُه هندسةُ إقليدس، بل ربما هو أقرَب إلى كَونِه مُشابهًا لواحِد مِن تلك الأكوان التي تَصِفُها قوانين الهندسة الجديدة. وهكذا أصبح الكَون كمية مجهولة، واضطررنا إلى إعادة صياغة تصوّراتنا عن الكَون من جديد. تمّت هذه الصِّياغة الجديدة إلى حَدٍّ ما سنة 1920 من خلال أفكار أينشتاين في النظرية العامة في النسبية. لم يَستنِد فَهمُنا للكَون هذه المرّة على الإحساس العادي، بل استَنَدَ إلى الإحساس غير العادي الذي مَنحَتنا إياه الهندسة الحديثة.

ظهَرتْ بوادرُ هندسةِ إقليدس في مصر الفرعونية بشكل تطبيقاتٍ واقعية لِحلّ مشكلةِ تقسيم الأرض الزراعية ومَسحِها، وحَلِّ بعض المُعضلات في البِناء، بل إنّ مَعنى كلمة الهندسة Geometry في اللغة اليونانية أصلًا هو: "قياس الأرض". وقد تَشكَّلتْ بُذورُ مَفاهيم النقطة والخطّ

المستوي والمُجَسّم من أفكار حسِّيةٍ عمليةٍ أثناء مَسح سطح الأرض الزراعية، ورَسم الطّرق والحقول الزراعية، وعند قَطْع أحجار البِناء الغرانيتية. ولا شك بأنّ المفهوم الهندسي الهام الذي يَنصُّ على أنّ الخطوط المتوازية هي الخطوط التي لا تلتقي أبدًا مهما امتدَّت، كان مفهومًا راسِخًا في عقول المصريين، ومُرتَبطًا في أذهانهم بظواهر موجودة أمامهم على الأرض، مِثل خطوط الفِلاحة، وآثار عجلات العربات على الطُّرق. وبالنَّظر إلى مَنشئِها، كان يجب أنْ تُعتبر الهندسة مجموعة مِنَ الحقائق الرياضية التي تَصِفُ العلاقات بين النقط والخطوط والمستويات والمُجَسّمات هنا على سطح الأرض. ولكن ما حدَث في الواقع، هو أنّ المصريين والبابليين والإغريقيين اعتَقدوا أنّ الهندسةَ هي مجموعة الحقائق الرياضية التي تَصِفُ العلاقات بين النقط والخطوط والمستويات والمُجَسّمات ليس على سطح الأرض فقط، وإنما في الكَون كله.

في عصر إقليدس، حوالي 300 سنة قَبل الميلاد، كان الفلكيون يَستخدمون نظريات الهندسة وكأنها قوانين علمية، فإذا أرادوا أنْ يتصوَّروا كما تصوَّر الفلكي إيودوكسس Eudoxus أنّ النجوم تتحرك على كُرة شفافة هائلة، فإنهم يتصوّرون فورًا أنّ الكُرة في الكَون مِثل الكُرة على سطح الأرض. وإذا تصوَّروا المسافة بين جسمَين في السماء اعتقدوا أنه من البَداهة أنّ أقصَر مسافة بين نقطتَين في الفضاء الكَوني هي الخطّ المستقيم الذي يَصل بينهما، كما هو الحال على الأرض (التي كانوا يعتقدون بكَونِها مسطَّحة). وباختصار، فإنّ الفلَكيين الإغريقيين عندما كانوا يتصوَّرون هندسة الكَون العامة، كانوا يُطبّقون نتائج تجاربهم الأرضية في مجال أكبر وأوسَع بكثير من الأرض دون مبالاة ولا تمحيص.

وبطريقة ما، فإنّ ما قدَّمه إقليدس من إضافات مهمة في الهندسة إنما زادت من قوة الوَهم والاعتقاد بأنّ الهندسة هي عِلمٌ كَونيّ. ما فَعله إقليدس هو البرهان على أنّ مئات النظريات الهندسية التي تَجمَّعت على مرِّ القرون يمكن أنْ تُستَنبط منطقيًّا من عَشر فرضيات فقط. وكانت بين هذه الفرضيات العَشر بعض الحقائق العامة التي اعتُبرت بمَثابة بديهيات وحقائق كَونية مِثل: "يمكن رَسم خطٍّ مستقيم من نقطة إلى أية نقطة أخرى"، و"كلّ الزوايا القائمة متساوية مع بعضها"، و"إذا أضيفت متساويات إلى متساويات كانت النتائج متساوية"، و"الكلّ أكبر من الجزء". لقد كانت إنجازاتُ إقليدس إنجازات عظيمة خطيرة رائدة في الرياضيات، وقد أَضفَتْ على الهندسة مَسحَة قوية من العالمية والثقة وقوة البرهان المنطقي الذي لا يُمكن نَقضه. تركَّزت التحديات الوحيدة التي وُجِّهتْ إلى إنجازات إقليدس على فرضيته الثانية وفرضيته الخامسة. كانت الفرضية الثانية هي: "يمكن مَدّ الخطّ المستقيم إلى ما لانهاية"، والفرضية الخامسة: "إذا كان لدَينا خطٌّ مستقيم وبجانبه نقطة منفصِلة عنه، فلا يُمكن رَسم سوى خطّ واحِد يمرّ مِن هذه النقطة موازيًا للمستقيم الأول". منذ أيام إقليدس وعلى مرّ القرون بَعده، أثارَ علماء الرياضيات درجات مُتفاوتة مِن الشك حول صِحة هاتَين الفرضيتَين. لمْ يشكّ علماء الرياضيات في كَون هاتَين الفرضيتَين حقائقَ تبدو بديهية كما يُقرِّرُها الحسُّ السليم، ولكنهم لم يوافِقوا إقليدس على أنّ هاتَين الفرضيتَين هما بمَثابة حقائق مُثبَتَة بذاتها، بل اعتقدَ المعارضون أنّ فرضيتَي إقليدس الثانية والخامسة هما في حقيقة الأمر نظريتان يُمكن استِنباطهما مِنْ الفرضيات الثَّمان الأخرى.

استَندتْ شكوكُ المعارضين في قبول هاتَين الفرضيتَين كحقائقِ على حَدسٍ وإحساسٍ داخلي لدَى بعض علماء الرياضيات، إذ لم يَستطع بعضُهم قبول أية مسألة تتعلَّق باللانهاية على أنها حقيقة بديهية ثابتة، في حين شكّك آخرون بالفرضية الخامسة على وَجه التحديد، لأنها عَبّرتْ عن فكرةٍ بَدَتْ أكثَر تعقيدًا من الفرضيات الأخرى. ومهما كانت الأسباب، فقد تردَّد هؤلاء المعارضون في قبول فرضيتَي إقليدس الثانية والخامسة استنادًا إلى اعتقادٍ أو إيمان، وليس استنادًا على برهان حقيقي، ولم يَكن لدَيهم أي شك بأنّ هذا البرهان سيتَحقَّق ذات يوم.

لمْ يتحقَّق هذا البرهان أبدًا، إنما بدلًا عنه، تلقّى عالِم الرياضيات الألماني الشهير كارل فريدريك غاوس[57] سنة 1824 رسالة من صديق طفولته فاركاس بولياي Farkas Bolyai، وهو مدرّس للرياضيات كان قد أرسَل إلى غاوس يَطلُب منه تقييم ودراسة بَحث كَتَبه ابنه يانوس بولياي[58] Janos Bolyai، فقد تمكَّن هذا الابن الشاب من التوصُّل إلى اكتشافٍ مُذهِل يَحلُّ بَعد انتظار طويل مسألة الشك في فرضية إقليدس الخامسة.

أثبَتَ يانوس أولًا أنّ فرضية الخطوط المتوازية عند إقليدس هي بالفعل فرضية. ولكي تكون جزءًا من هندسة إقليدس، فلا بدّ من قبولها بذاتها. كما هدَم يانوس الاعتقاد الذي سادَ على مرّ العصور بصحّة هندسة إقليدس في كافة أرجاء الكَون، وحقَّق ذلك باستِبدال فرضيةِ إقليدس في الخطوط المتوازية، بفرضية أخرى مناقِضة ومُنافِية للحسّ العملي فقال: "إذا كان لدينا خطٌّ مستقيم وبجانبه نقطة منفصِلة عنه، يُمكن رَسم عدد لانهائي من الخطوط التي تمرُّ بهذه النقطة موازية للمستقيم الأول".

ثم انطلاقًا من هذه الفرضية وفرضيات إقليدس التّسع الأخرى، استَنبطَ يانوس نظريات هندسية تختلف تمامًا عن هندسة إقليدس، ولكنها تُماثلها في استِنادها الصحيح على قواعد المنطق، وكما قال يانوس حينها: لقد وَصَفتْ هذه الهندسةُ الجديدة "كَونًا جديدًا". وهكذا يَختلف الكَون الجديد الذي وَصَفته هذه الهندسةُ الجديدة عن عالَمنا الأرضي اختلافًا كبيرًا بسبب تغيير فرضية الخطوط المتوازية...!

قَرأ غاوس هذا البحث باهتمام كبير وشعور بالألفَة، فقد كان هو نفسه قد توصَّل إلى هذه الاكتشافات ذاتها منذ عدة سنوات، وتحدَّث عن ذلك في رسالةٍ إلى بولياي الأب قال فيها أنه تردَّد في نَشر هذه الاكتشافات خوفًا من الاستياء العام الذي سَيثيره حتمًا بين زملائه من علماء الرياضيات. ففي تلك الأيام كانت هندسةُ إقليدس مقدَّسة لدَيهم كالإنجيل، وكانت هذه الهندسة الجديدة بمَثابة اكتشافِ إنجيلٍ جديد يختلف اختلافًا جَذريًّا عن الإنجيل الأول في وَصفِه للدِّيانة المسيحية. في سنة 1832، توصَّل عالِم الرياضيات الروسي نيكولاوس لوباتشيفسكي[59] Nicholaus Lobachevski بشكلٍ مستقل إلى الاكتشافات ذاتها التي كان قد توصَّل إليها يانوس بولياي وغاوس. ويبدو أنّ هذه الأنباء وما سبقَها من كَشف غاوس قد ثبَّطتْ همَّة بولياي الابن حتى تخلَّى عن دراسة الرياضيات، وانضمَّ إلى سلاح الفرسان.

عندما سَمع علماء الرياضيات بهذا الاكتشاف، كان ردُّهم انفعاليًّا شديدًا كما توقّع غاوس. كان ردُّ الفِعل الأول هو عدم التصديق: لا يبدو معقولًا أنْ تكون هندسةُ إقليدس مجرَّد نوع من أنواع الهندسة، وليست هندسة الكَون كله! ولا يبدو ممكِنًا أنْ تُستَنبط هندسةٌ منطقية صحيحة من فرضية لا تبدو حقيقية...! كان صَعبًا على علماء الرياضيات قبول هذه المناقشة الأخيرة بالذات، لأنها تَعني أنّ الرياضيات هي من اختراع الإنسان، وأنها ليست مجموعة من الحقائق الكَونية العامة التي تَستندُ على الحسِّ العلمي السليم كما تَصور الجميع مِن قَبل. فإذا تمكَّن بولياي وغاوس ولوباتشيفسكي بكلّ بَساطة مِنْ اختراع فرضية ليست لها أية علاقة بالحقيقة والواقع وبالحسِّ العملي السليم، ثم استَنبطوا منها نظامًا رياضيًّا منطقيًّا صحيحًا، فهذا يعني أنّ الرياضيات ذاتها ليست سوى اختراع! وعلى وَجه التحديد، فإنّ هذا يعني أنّ هندسة إقليدس كانت اختراعًا على الرغم من استِنادها إلى مبادئ الحسّ العملي السليم أكثَر من هندسة لوباتشيفسكي (كما يُسمّي علماءُ الرياضيات الآن ذلك الاكتشاف الذي قام به الثلاثة).

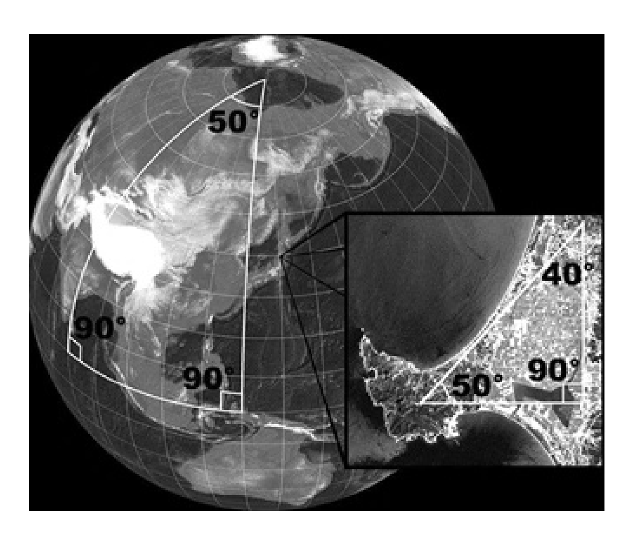
مع نهاية القَرن التاسع عشر، تقبّل علماء الرياضيات هذه الاكتشافات التي أخرَجتْهم عن الإيمان التقليدي بهندسة إقليدس، وغيَّرتْ نظرتهم التقليدية إلى الرياضيات بشكل عام. لم يَقِفوا عند هذه النقطة، بل راحُوا يتَسابقون في البَحث عن أنواع أخرى من الهندسة الصحيحة رياضيًّا ومنطقيًّا، وترَكوا الأمرَ للعلوم لكي تقرِّر أي نوع من أنواع الهندسة أَصدَقُ وَصفًا للعالَم وللكَون. مع بداية القَرن العشرين، كان لدَى علماء الرياضيات الأنواع الهندسية الثلاثة الرئيسية التي نَعرفها اليوم، فبالإضافة إلى هندسة إقليدس، وهندسة لوباتشيفسكي، ظهَرتْ أيضًا هندسة برنهارد ريمان[60] عالِم الرياضيات الألماني الذي قدَّم نظرياته الهندسية سنة 1854.

تَختلفُ هندسةُ ريمان عن هندسة إقليدس في الفرضيتَين الثانية والخامسة بطريقةٍ تُنافي الحسَّ العلمي العادي، إذ إنّ فرضيةَ ريمان الثانية نَصَّتْ على أنه "لا يُمكن مدّ الخطّ المستقيم إلى ما لانهاية" وهي بذلك تمثِّل النَّقيض المنطقي المباشر لفرضية إقليدس الثانية. كما اختلَفتْ فرضيةُ ريمان الخامسة في الخطوط المتوازية عن كلّ من فرضيتَي إقليدس ولوباتشيفسكي، إذ نَصَّتْ على أنه "إذا كان لدَينا خطٌّ مستقيم وبجانبه نقطة منفصِلة عنه، فلا يُمكن رَسم أي خطٍّ يمرّ من هذه النقطة موازيًا للمستقيم الأول".

بسبب استِناد هندسة لوباتشيفسكي وهندسة ريمان على فرضيةٍ واحِدة على الأقل لا تَنسَجم مع الإحساس العام بالعالَم المألوف مِن حولنا، فهُما يُصَوِّران علاقات بين النّقط والخطوط والمستويات والمُجسّمات في عوالِم غير مألوفة لِحواسّنا. وعلى الرغم من ذلك، فقد تَبيَّن أنّ هذين النوعَين الشاذَين مِنَ الهندسة اللاإقليدية يمكن أنْ ينطَبقا على شكلَين مألوفَين: إذ يُشبه العالَم الذي تَصِفُه هندسة لوباتشيفسكي سَطحَ بوقَين متلامِسَين حيث تلتَحم الفتحةُ الأمامية العريضة للبوقِ الأول بالفتحة الأمامية للبوقِ الآخَر، ويمتدُّ طولُ كل منهما إلى ما لانهاية. يسمَّى هذا السَّطح هندسيًّا: "الكُرة المُزَيَّفَة Pseudosphere" على الرغم من أنها لا تُشبه الكُرة أبدًا. وفي عالَمٍ شَكلُهُ كَهذه الكُرة المزيفة، تَمتدُّ الخطوطُ المستقيمة على طول السطح الذي يُشبه البوق إلى ما لانهاية، وبشيءٍ مِنَ التركيز، يُمكن أنْ نتصوَّر كيف تَنطبِق فرضية لوباتشيفسكي في الخطوط المتوازية على هذا

النموذج بشكل معقول، أي أنه بالنظر إلى الشكل الغريب المميّز الذي يُشبه سَطح البوق، يمكن رَسم عدد لانهائي مِنَ الخطوط المتميّزة التي تمرّ مِنْ نقطة واحدة بحيث يكون كلًّا منها موازيًا لمستقيم واحِد.

أما تَصَوّر العالَم الذي تَصِفُه هندسة ريمان فهو أسهَل مِنْ ذلك، لأنها تَنطَبق على عالَمٍ شَكلُه كُرويّ، والخطّ المستقيم على سَطح كُرة، هو بمَثابة قَوس في دائرة (يمثِّل قَوسُ الدائرة أقرب مسافة بين نقطتَين على سطح كُرة، مثلما يمثِّل الخطّ المستقيم أقرَب مسافَة بين نقطتَين على سَطحٍ مُستو)، ومِنَ السهل أنْ نتصوَّر كيف تَنطبق فرضيتَي ريمان الغريبتَين على هذا النموذج إذ: تَنصُّ فرضيةُ ريمان الثانية على أنه لا يُمكن مَدّ الخطّ المستقيم إلى ما لانهاية، وبالفعل تُشكِّل الخطوط المستقيمة على سَطح الكُرة في الحقيقة أقواسًا لها نهاية وطول محدَّد بحسب قِطر الكُرة. أما فرضيته الخامسة، فإنه لا يمكن أيضًا رَسم خطوط متوازية غير متلاقية على سطح الكُرة، لأن أقواس الدّوائر العظمى تَتلاقى دائمًا، ولا يُمكن أنْ تكون متوازية.



[المترجم: شَكلٌ توضيحيّ تُمثِّل فيه الكُرة الأرضية العالَم الذي تَصِفه هندسةُ ريمان حيث

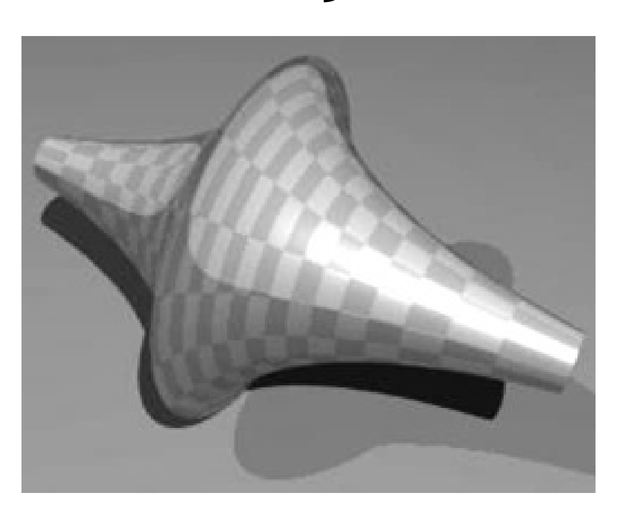
"لا يمكن مدّ الخطّ المستقيم إلى ما لانهاية" وحيث "إذا كان لدَينا خطٌّ مستقيم وبجانبه

نقطة منفصِلة عنه، فلا يُمكن رَسم أي خطّ يمرّ من هذه النقطة موازيًا للمستقيم الأول". في مِثل

هذا العالَم الكُروي، يكون مجموع زوايا المثلث أكثَر من 180 درَجة. أما الشَّكل الجانبي المُكبَّر

في المربَّع، فيُمثِّل شَكلَ العالَم المُسَطّح الذي تَصِفه هندسةُ إقليدس الذي تبدو عليه الأرض

عند اقترابِنا منها والعَيش على سَطحها، ويَكون فيه مجموع زوايا المثلث 180 درجة].



[المترجم: شَكل الكرة المُزَيَّفة الذي يُمثِّل شَكل العالَم الذي تَصِفه هندسةُ لوباتشيفسكي].

يُمكن القول إنّ العالَم الذي تَصِفه هندسةُ إقليدس هو عالَمٌ مسطَّح مُستوٍ، ففي عالَمٍ كهذا، وهو أكثَر النماذج التي نألَفها في حياتنا اليومية، تمثِّل الخطوطُ المستقيمة بالفِعل خطوطًا مستقيمة على السطح المستوي، ومِنَ السهل أنْ نتصوَّر كيف تَنطبق فرضيةُ إقليدس في الخطوط المتوازية في عالَمٍ مُسطَّح: فعَلى سَطحٍ مُستوٍ، لا يُمكن أنْ نَرسم سوى خطٍّ مستقيم واحِد يمرّ مِن نقطة معيَّنة موازيًا لمستقيم آخَر، كما أنه على السطح المستوي، يُمكن مدّ الخطوط المستقيمة إلى ما لانهاية.

تركَ علماءُ الرياضيات لعلوم الفيزياء والفلك الإجابة على السؤال: هل تُشبه هندسةُ الكَون العامّة شَكلَ الكُرة؟ أم شَكلَ البوقَين المتلامسَين Pseudeosphere؟ أم المستوي المُسطَّح؟ ولكن العلوم الفيزيائية لمْ تحاول الإجابة على هذا السؤال حتى القَرن التاسع عشر. ويعود سَبب هذا التأخُّر في الإجابة على مِثل هذا السؤال المهمّ إلى أنّ العلماء كانوا يحتاجون إلى بعض الوقت، ومزيد من الفَهم، قَبل أنْ يُدرِكوا أنّ الإجابة مُمكِنة فِعلًا. ولم يَكن هذا الإدراك سَهلًا، ففي البداية لم يكن واضحًا كيف يُمكن تحديد هندسة كَونٍ عظيم الاتساع لا نستطيع أن نرى منه سوى جزء صغير؟! إنّ محاولاتِنا لِفَهم الكَون تُشبه في ذلك محاولةَ كائنٍ بَحريٍّ صَغير فَهْمَ هندسة حوتٍ عظيم، أو فَهمَ أبعاد المحيط الهائل. كان أوّل مَنْ أدركَ أنّ هذا السؤال مُمكِن الإجابة عليه، وأوّل مِنْ أوضح لنا كيفية هذه الإجابة هو ألبرت أينشتاين[61].

نَشَر أينشتاين نظريته العامة في النسبية سنة 1915، وأوضَح فيها كيف يُمكن فَهمُ الهندسة العامة لشيءٍ هائلٍ كالكَون بدراسة مجموعةٍ مِنَ الملاحظات الجزئية الصغيرة، كالمعلومات المُتاحَة لنا نحن البَشر عن الكَون. يُمكن توضيح جَوهر تفسيره بالمِثال التالي: تَخيَّلْ نفسَكَ رَسامًا يريد رَسم شَكل الأرض عن طريق القيام برحلات عديدة على سَطحها ومعكَ أفضَل وسائل البحث. ولتَبدأ رحلتكَ بالمَسير 100 مِيل إلى الجنوب، ثم مِثلها إلى الغرب، ثم مِثلها إلى الشمال، وتتوقَّع أنكَ إذا سِرت بعدَها مسافة 100 مِيل أخرى إلى الشرق ستَصل بالضبط إلى النقطة التي انطَلقتَ منها، وبهذا التوقَّع في نفسِك، تَنطلق في المرحلة الأخيرة مِنْ رحلتكَ، ولكنكَ تُفاجأ بأنك قد عُدتَ إلى نقطة الانطلاق بأسرَع مما توقَّعتَ، وتُشير أجهزةُ القياس لديكَ بأنكَ في المرحلة الأخيرة لَمْ تقطَع 100 مِيل، وإنما قطَعتَ حوالي 99 ميلًا، وعندها تَفترضُ إما أنّ نقطَة الانطلاق قد تحرَّكتْ، أو أنّ أجهزةَ القياس قد أخطأتْ. فما الذي حَصل؟

الذي حَصل بالطبع هو أنّ إحساسكَ العملي كان خاطئًا، وقد أوهَمكَ إحساسُكَ بأنّ الأرضَ التي سافرتَ عليها مُسَطَّحة، وأنّ الجِهات الأربع فيها متعامِدة على بعضِها كأضلاع المربَّع على سَطح مستو.. الحقيقة هي أن النقطة التي انطلقتَ منها لمْ تَتحركْ، كما أن أجهزتَكَ صحيحة تمامًا. وفي الواقع، إن قياسات هذه الأجهزة إنما تُشير إلى أنّ الأرض ليست مُسطَّحة، وأنك لَمْ تُسافر على أضلاع مربَّع كما افترَضتَ، بل إنّ الأرض كُروية، وبالتالي فإنّ هندَستها ليست كنموذج هندسة إقليدس، وإنما كَهندسة ريمان. وإليكَ تفسير ما حَدثَ في رحلتكَ: لقد انطَلقتَ مِنْ مكانٍ ما في النصف الشمالي مِنَ الكرة الأرضية، واتَّجهتَ جنوبًا نحو خطّ الاستواء على أحَد خطوطِ الطول، وبَعد مسافة 100 مِيل، اتَّجهتَ غربًا على أحَد خطوط العَرض لمسافة 100 مِيل، ثم اتَّجهتَ نحو القطب الشمالي على خطّ طولٍ آخَر لمسافة 100 مِيل، وكانت مسافةُ العودة مِن هناك إلى نقطة انطلاقكَ أقلّ مِن 100 مِيل لأنّ خطوطَ الطول تَتقارَب كلما اقتَربتَ مِن القطب، وتَتباعَد كلما ابتَعدتَ عنه.

يُمكنكَ الآن أنْ تَعرف لَون الدُّب في الأحجِية الأمريكية التي ورَدتْ في مقدِّمة هذا الفَصل، فهذا الدُّب لا بد أنْ يكون دُبًّا قطبيًّا أبيضَ اللون، لأنّ المثلث الذي سارَ عليه الصيادون لا يمكن أنْ يَحدُث إلا إذا كانت نقطة انطلاقهم في القطب الشمالي ذاته. يُحاول الفلَكيون في هذا العصر التوصُّل إلى فَهمِ هندسةِ الكَون بطريقةٍ تُشبه ما ذَكرناه آنِفًا عن هندسةِ الكُرة الأرضية: أي بدراسةِ وتصويرِ وقياسِ جزءٍ مِنَ الكَون بدقّة كبيرة، وهم متفائلون بقدرَتهم على تحقيق ذلك بفَضل ثقتهم بنظرية أينشتاين، وبفَضل مَعرفتهم لأنواع الهندسة، وتعمُّقهم في فَهمها، بحيث دَخَل اللامعقول واللامألوف في أساليب تفكيرهم وتصوّراتهم. يُمكننا مِنْ خلال قُدرتنا على تصوّر اللامعقول واللامألوف أنْ نزيد فَهمَنا، ونُدركَ وضوح علاقتنا بالأشياء، حتى بتلك العوالِم الافتراضية التي لا نستطيع الوصول إليها فيزيائيًّا وعمليًّا لأنها تقَع خارج مَجال إحساساتنا العادية.

يَدرسُ الفلَكيون المادة الكونية التي تُحيط بنا وهم مسلَّحون بالتلسكوبات البصرية وتلسكوبات الراديو ونظرية أينشتاين، ويَتفحَّصون النجومَ وغيوم الغازات والغبار التي تَنتشَر في الفضاء... والهدف هو الإجابة على السؤال: ما هي هندسة الكَون؟ حتى الآن ما زالت قياساتهم غير دقيقة إلى درجة تكفي للوصول إلى إجابة قاطِعة، ولكن يبدو شيئًا فشيئًا أنّ هندسةَ الكَون تشبه النموذج الذي تُصوِّره هندسةُ غاوس وبولياي ولوباتشيفسكي...!

قد تُمثِّل هذه النتيجة المبدئية صَدمة أخرى موجَّهة إلى ثقتنا التاريخية بهندسة إقليدس، ومع هذه الصَّدمات والتناقضات الأخرى التي وُجِّهتْ إلى إحساساتنا العادية على مَر القرون الأخيرة، يمكننا أنْ نتساءل فيما إذا كنا نستطيع الاعتماد على إحساساتنا العادية العامة في دراسة الكَون البعيد. باختصار: هل يُمكن اعتبار إحساساتنا العامة، وتجارب حياتنا اليومية على الأرض حقائقَ كَونية شاملة؟

استطَعنا بالاعتمادِ على فَهمِ الأنواع المختلفة من الهندسة اللاإقليدية أنْ نُجيبَ على هذا السؤال. لقد توصَّل علماءُ الرياضيات الآن إلى إدراك أنه على الرغم من اختلاف العوالِم التي تَصِفُها أنواعُ الهندسة الثلاثة إذا نظَرنا إليها عن بُعد، إلا أنها تُصبح مُتماثِلة إلى حَدّ كبير إذا انغمَسنا فيها ونظَرنا إليها عن قُرب. يُمكن تَصوُّر هذه الملاحظة عند تفهُّم النماذج الثلاثة: إذا نظَرنا عن بُعدٍ كبير، يُمكن تمييز سَطح البوقَين والكُرة والمستوي المسطَّح عن بعضها بكل سهولة، ولكن إذا نظَرنا إليها مِنْ مسافةٍ قريبة جِدًّا، فإنها تبدو متشابِهة تمامًا. ولا يجب أنْ تُدهِشنا هذه الملاحظة، لأنها تنسَجم مع ما نَعرفه عن الخطأ الذي ارتكبَهُ القدماء عندما ظَنّوا أنّ الأرض منبسِطة، ولمْ يُدركوا كُرويتها بسهولة. ولكنّ الحقائق والعلاقات الرياضية كانت مختلفة، وظهَر أنّه على الرغم مما كان لِهندسةِ إقليدس مِن دَورٍ هامّ في الرياضيات والهندسة، فإن كلّ أنواع الهندسة تَنطَبق في الحقيقة على نموذج ريمان، ونموذج لوباتشيفسكي.

ويبدو أنّ الأمر يتعلَّق أساسًا بنسبةِ القياس، فإنّ إحساسَنا العادي العام الذي يوافِق هندسةَ إقليدس لا يَعود إلى كَونِنا بشرًا، أو إلى ظروف حياتنا البشرية في حَدِّ ذاتها، ولكنَّ إحساسَنا العام الذي جَعلَنا نَعتقد بعالَمية هندسة إقليدس على مَرِّ ألفَي سنة، إنما يعود أساسًا إلى صِغر أجسامنا بالقياس إلى سِعة الكَون، وإلى مَحدودية قدرة حواسّنا بالنسبة إلى عظَمة الكَون. وإذا كانت هنالك مخلوقات أخرى تَعيش في هذا الكَون، ولَها تلك الإحساسات المَحدودة مثلنا، فمِنَ المتوقَّع أنها في المراحل الأولية من مراحل تطوّرها الفكري سَتقدِّس وسَتثِق مثلنا بهَندسةٍ على نمَط هندسة إقليدس.

وهكذا، بسبب نمو قدرتنا على تصوّر اللامعقول وفَهم اللامألوف الذي اكتَسبناه مِنْ خلال تعلّمنا الهندسةَ اللاإقليدية، فإنّ إحساسَنا وفهمَنا العادي العام قد تواضَعَ وعَظُمَ في الوقت نفسه: تواضَعَ لأننا ندركُ الآن أنّ إحساسَنا العادي العام ليس كافيًا، ولا يُمكن الاعتماد عليه وَحده في فَهمِ العالَم وما وراءه، ولكنَّه في الوقت نفسه قد تَعاظَم وازداد قوة وصَفاء، لأننا نُدركُ الآن بدقَّةٍ رياضية أنه إذا وجِدت أنواع أخرى من الحياة في أنحاء الكَون كما يَعتقد أغلب علماء الفلَك، فلا بد مِنْ أنْ يكون إحساسنا العام عالميًّا وعامًّا بالفعل.

قضية اعتقاد وإيمان:

نظرية غودل Godel's Theorm

"إنّ ما يبدو مخطّطًا وواقعيًّا لا يمكن أنْ يكون كافيًا لكي يشمل كل الحقيقة".

بوريس باسترناك Boris Pasternak

منذ حوالي خمسين سنة خَلَتْ، كانت الحقيقة تعني بالنسبة إلى عالِم الرياضيات أنها مرادِفة للإثبات المنطقي. وكان الرأي المُفترَض يُعتبر صحيحًا إذا أمكن إثبات صحته منطقيًّا، ويُعتبر مَغلوطًا إذا لمْ يمكن إثبات صحته. ولهذا عاش علماء الرياضيات في عالَمٍ مِن الوَهم المثالي لم يُترَك فيه شيء للاعتقاد أو للإيمان، لأنّ كل شيء في عالَمهم كان مِنَ الممكن إثبات صحته أو خطئه. وفي المقابل، ففي العالَم الذي نألفه ونعيش فيه، يلعبُ الاعتقادُ والإيمان دَورًا كبيرًا في تحديد الحقيقة وتِبيان الصواب والخطأ. وعلى وَجه التحديد، فإنّ الفرضيات التي تثير الجَدل والخِلاف (مِثل نظرية داروين ونظرية الخَلق في أصل الأنواع) هي فرضياتٌ مقبولة على نِطاقٍ واسِع على الرغم من أنها غير مثبتة الصحة، وربما لن تَثبت صحتها أبدًا.

في سنة 1931، تغيَّر عالَمُ الرياضيات المثالي وأصبح أقرَب إلى عالَمنا الواقعي عندما أثبَتَ عالِم المنطق النمساوي كورت غودل[62] أنه سَتوجَد دائمًا بعضُ الحقائق الرياضية التي لا يُمكن إثبات صحتها منطقيًّا. وفجأة، دَخَل إلى عالَم الرياضيات المثالي دَورٌ رسميٌّ نظاميّ للاعتقاد الشخصي والرأي الذاتي...! لأنّ الطريقةَ الوحيدة الممكِنة للاعتراف بحقيقةٍ لا يُمكن إثباتها، سواء كانت حقيقة رياضية أم غيرها، هي قبول تلك الحقيقة على أنها قضية اعتقاد وإيمان وتسليم (في الواقع، لقد كان مدى تأثّر عالِم الرياضيات بذاتيّتِه وإحساساتِه الداخلية، بالإضافة إلى شعوره الغريزي، دَورًا هامًّا بل وأساسيًّا في تشكيل فرضياته). لقد كان في إثباتِ غودل هذا، مقدمةً لِنتائج لم تُدرَك أبعادها الكاملة حتى الآن: أصبح مِنَ الضروري بالنسبة لعلماء الرياضيات أنْ يَقبلوا وجودَ حقائق لا يُمكن إثباتها، ولكنهم لم يقرّروا ما سيكون دَور الاعتقاد والإيمان في عالَمهم الجديد بعد غودل.

مع بداية القرن العشرين، بدأ عالَم الرياضيات المثالي القديم بالانهيار والتَّحول إلى شَكلِه الجديد، ووُضِع المنطق الذي كان القاعدة الأساسية في البرهان الرياضي تحت منظار الشكّ منذ ذلك الحِين. طَرح بعضُ علماء الرياضيات مثل برتراند رَسل[63] بعضَ التناقضات المنطقية التي لا يمكن حلّها بدون إجراء بعض التعديلات في المنطق التقليدي. ولكي تزداد الأمور تعقيدًا، اختلفَ علماءُ

الرياضيات اختلافًا كبيرًا حول اختيار الحلّ الأمثَل من التعديلات المقترحَة. أثارَتْ هذه التطورات كثيرًا مِنَ القلق في ذلك الوقت، لأنّ علماءَ الرياضيات كانوا منهَمكِين آنذاك في جُهدٍ مُركَّز لِتطوير عِلم الحِساب والأعداد وإرسائه على قواعد منطقية راسِخة كما فَعلَ إقليدس في استِنباط حقائقه الهندسية، أي بالاستِنتاج المنطقي بدءًا مِنْ مُسلَّمات أولية بسيطة وقليلة. كان هذا جُهدًا مهمًّا، لأنّ عِلم الحساب والأعداد كان قد تطوَّر على مرّ القرون بشكلٍ عفويّ، وكانت بعضُ حقائقه قد قُبِلتْ بدون برهان، حتى فقَدَ علماءُ الرياضيات الثقةَ بمنطقية هذا العِلم بشكلٍ عام، ولكن نجاح هذا الجُهد العظيم ظلَّ معلَّقًا في الميزان، بينما استمرّ الحِوار والخِلاف حول كيفية تعديل المَنطق حتى الثلاثينيات. ثم، في سنة 1931 حسَمَ غودل الموقف وحلَّ الخِلاف ببرهانه على أنه سَتظلُّ بعضُ حقائق الرياضيات دائمًا غير قابلة للبرهان المنطقي. كانت هذه النتيجة رائعة في حَدِّ ذاتِها، ولكن ما زادَ في قيمةِ وأهميةِ ما حقَّقه غودل هو أنه استَخدم المنطق في اتِّهام المنطق...!

تَعتمدُ طريقةُ غودل على مناقشة فرضية لا يمكن إثبات صحتها منطقيًّا، وتُشبه في ذلك السؤالَ الذي طَرحَهُ رَجُلٌ على امرأة في أحَد الإعلانات التلفزيونية فقال: *"هل صحيح أنه عندما تقولين لا فأنت تقصدين نَعَم؟"*. تَقودُ فرضيةُ غودل إلى التناقض الحتميّ بسبب تركيبها اللفظيّ الخاصّ سواء اعتَبرها المرء صحيحة أو مغلوطة.

تَصَورْ مثلًا أننا قد أثبَتنا منطقيًا صحة الفرضية "لا يمكن إثبات صحة هذه الفرضية" فإنّ إثبات صحتها يعني أننا قد نفَينا صحة قولِنا بأنه "لا يمكن إثبات صحة هذه الفرضية"، أي أنّ هذه الفرضية مغلوطة...! باختصار، عندما نُثبِت صحة الفرضية فإننا نُثبِت خطَأها...! وهذا تَناقضٌ لا معنى له.

مِنْ ناحية ثانية، تَصَّور أننا قد أثبَتنا منطقيًّا عدم صحة الفرضية، فإنّ نفيَها يعني عدَم صحة قولنا بأنه "لا يُمكِن إثبات صِحَّة هذه الفرضية"، أي أنّ هذه الفَرضية صحيحة...! أي أننا عندما نُثبتُ عدم صحة الفرضية فإننا نُثبتُ صحتها...! وهذا تَناقضٌ لا مَعنى له أيضًا.

وهكذا يبدو واضِحًا الآن بَعد هذا التحليل أنّ الفرضية الصَّحيحة هي أننا: "باستِخدام المنطق، لا يمكن إثبات صحة هذه الفرضية". لا نستطيع القولَ بأننا قد أثبَتْنا صحة هذه الفرضية، لأن هذا سَيوقعنا في التناقض المنطقي مِنْ جديد، ولكنَّنا نَستطيعُ القولَ بأننا نؤمِن ونَعتقِد بِأنّ هذه الفرضية صحيحة...! [المترجم: يشبه هذا التناقض المنطقي قولُنا في اللغة: لكلِّ قاعدةٍ شَواذ].

قادَ هذا الاكتشافُ غودل إلى الاعتقاد بأنه لا بد مِنْ وجود عددٍ لانهائي مِنَ الفرضيات الرياضية التي تتبع هذا النّمَط، فرضيات واضحة الصحة بشكل خارجٍ عن مجال المنطق، ولا يمكن إثباتها بالمنطق. سأسمّي مِثل هذه الفرضيات هنا: "الحقائق التي لا يُمكِن إثباتها منطقيًا".

لا تُحدِّد نتائجُ غودل بشكلٍ دقيق عَدَدَ الحقائق التي لا يمكن إثباتها في الرياضيات، ولا تُبيّنُ طبيعتها الخَارجة عن مَجال المنطق، ولا حتى الخواصُّ التي تُمكّن عالِم الرياضيات من معرفة الحقيقة الرياضية التي لا يمكن إثباتها منطقيًّا. ولذلك فمِن حيث المبدأ، أصبح على علماء الرياضيات

الآن أنْ يعمَلوا في عالَمٍ يمكِن أنْ تكون فيه كلُّ فرضيةٍ رياضية حقيقة لا يمكن إثباتها، ولا يتَّضِح فيه نوع المبادئ الخارِجَة عن المنطق، والتي يجب أنْ تُستخدَم في تِبيان صِحَّة فرضِية يُشّك في كونها حقيقة لا يمكن إثباتها.

يمكن اعتبار ملاحظة كريستيان غولدباخ[64] Goldbach Christian مِثالًا للحقيقة التي لا يمكن إثباتها في عِلم الحساب. فقد لاحَظ غولدباخ أنه يُمكن كتابة كلّ عَدد زوجيّ بشكلِ حاصِل جَمع عددَين أوّليَّين [العدد الأوّلي هو الذي لا يَقبل القِسمة بدون باقٍ إلا إذا قُسِمَ على نفسِه أو على واحِد مِثل: 1، 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23،...]. يُمكن كتابة كل مِنَ الأعداد الزوجية 2، 4، 6، 8 مثلًا بِشكلِ حاصِل جَمع لِعددين أوّليين أي:

1 + 1 و1 + 3 و3 + 3 و1 + 7 وهكذا.

لاحَظ عالِم الرياضيات الألماني كريستيان غولدباخ سنة 1742 هذا الأمر وعرضَه على عالِم الرياضيات السويسري الشهير آنذاك ليونهارد أويلر[65] Leonhard Euler، ولكن أويلر لمْ يستطع إثبات صحة هذه الملاحظة. وعلى الرغم من أنّ تطبيقها قد استمرّ صحيحًا حتى العَدد ,000,0002، إلا أنّ أحَدًا لمْ يستطع إثبات صحتها منطقيًّا حتى الآن. وإذا أخَذنا اكتشافَ غودل بِعَينِ الاعتبار، أدرَكنا أنّ فشلَ علماء الرياضيات في إثبات صحة ملاحَظة غولدباخ على مرّ 250 سنة يدلُّ على أنها إما أنْ تكون حقيقة لا يُمكن إثباتها، أو أنها مَغلوطة على الرغم من كل الدلائل التي تؤيّد صحتها! وكلما مرّ الزمن، ازدادتْ صعوبةُ التأكُّد مِنْ كَونها حقيقة لا يمكن إثباتها، أم أنها ملاحَظة خاطئة. والسؤال الذي يُزعِج علماءَ الرياضيات ويلحُّ عليهم للإجابة هو: إلى متى سَيطول انتظارهم؟ وما هي الوسائل التي ستمكّنهم منْ معرفة أيّ مِنْ هذَين السؤالَين هو الأصحّ احتمالًا؟ إنّ مجرَّد استِخدام كلمة "احتمالًا" في سِياق البحث عن حقيقةٍ رياضية هو أمرٌ شاذٌّ غريب لمْ يألَفه علماءُ الرياضيات في عالِمهم المثالي قَبل عَصر غودل. والآن، يبدو الوصول إلى مِثل هذا القرار وإلى الإجابة الصحيحة أكثَر ضرورة وأبعَد خَطرًا وأهمية.

إذا لم يُمكِن التوصُّل إلى البرهان اليقيني بشكلٍ أو بآخَر، فستظلّ الملاحظةُ الصحيحة موجودة بشكلٍ مُعلَّق غير مفيد في الرياضيات. أما إذا تمّ التوصُّل إلى قرار خاطئ، فسوف تُستعمَل الملاحظة المغلوطة بشكلٍ غير سليم كأساس لِنتائج حسابية أخرى. وعلى كلِّ حال، يبدو أنّ القرار سيكون قرارًا عمليًّا وغير نهائي. إنّ البحث عن طريقة الحلّ هو أمرٌ خطير في حدِّ ذاته، لأنّ اكتشافَ غودل يقضي أنّ هذه الطريقة يجب أنْ تَستندَ إلى الاعتقاد والإيمان بدَلًا مِنَ المنطق. وأنّ إدراج أي مبدأ إيماني أو اعتقادي في الرياضيات سَيُغَيّر طَبيعتها المنطقية اليقينية المثالية، وستتَحدَّد نوعيةُ هذا التغير بطريقة الحلّ التي ستُطَبّق. وما زال مجال الاختيار واسِعًا أمام علماء الرياضيات في عالَم الإيمان والمعتقدات، إذ يوجَد الآن احتمالان على طرَفيّ نَقيض، وهما ما أريدُ تَسميتهما: المبدأ المادي، والمبدأ الإيماني في الاعتقاد.

حَسب المبدأ المادي، تُعتبر الفرضيةَ صحيحةً إذا كانت أبسَط تفسير ممكِن للواقع. أي أنه مبدأ يَنطلقُ مِنَ الاعتقاد بأنّ الفرضية يجب أنْ تكون جميلة وفنيّة عَقلانيًّا، مُختصَرة ومُوجَزة ومَقبولة فكريًّا، بالإضافة إلى قُدرَتِها على تفسير الملاحظات والمشاهدات الواقعية البَيِّنة. وهذا هو المبدأ الذي أرشَد نيكولاوس كوبرنيكوس[66] Nicolaus Copernicus في القَرن السادس عشر إلى نظريته في دَوران الكواكِب حول الشمس، عندما رَفض نظريةِ مَركَزية الأرض التي كانت سائدة آنذاك على الرغم من أنّ كلًّا مِنْ هاتَين النظريتَين كانت تفسّر المشاهَدات الواقعية المُتاحَة في ذلك الوقت، ولكن حتى يتمكَّن أصحابُ نظرية مركَزية الأرض مِنْ تَفسير حركة الكواكِب حول الأرض، اضطروا إلى تَبنّي نموذج معقَّد للمجموعة الشمسية، في حين كان نموذج كوبرنيكوس أكثر إقناعًا بسبب بساطَة انتِظام وتَناظر مَسارات الكواكِب في دَورانها حول الشمس. بالاستِناد إلى هذا المبدأ وحدَه، انطلقَ كوبرنيكوس متحمِّسًا في نَشر نظريتِه في دَوران الكواكِب حول الشمس بدلًا مِنْ نظرية دَوران الكواكِب حول الأرض.

يُعتبر هذا المبدأ الماديّ في العِلم الحديث بمَثابة قانونٍ في الاعتقاد والتصديق، ويسمّى عادةً بمَبدأ أوكام Occam Principle أو قانون الاقتصاد The law of parsimony للفيلسوف ويليام أوكام[67] William of Occam الذي كان أول مَنْ طرَح فِكرةَ الاقتصاد في المنطق، وعدم زيادة الفرضيات فوق اللزوم والضرورة، وذلك في القَرن الرابع عشر. كما صاغَ هذا المبدأ في القَرن التاسع عشر العالِم النمساوي الشهير إرنست ماخ[68] Ernest Mach قائلًا أنَّ العالِمَ يجب ألا يَضعَ ثقتَه وإيمانه إلا في تلك الفرضيات التي تفسِّر المشاهَدات الواقعية بشكلٍ موضوعيّ بسيط وموجَز.

على النَّقيض مِنَ المبدأ المادي، فإنّ المبدأ الإيماني لا يَحكُم على الفرضية بِحَسب قدرتِها على تفسيرِ المشاهَدات الواقعية فقط، وإنما أيضًا بمِقدار انسِجامها مع فلسفةٍ عامّة تُحدِّدُ الهدفَ والغاية لكل شيء. وبينما يَستند المبدأ الماديّ في العِلم على أنّ صحة الفرضية لا يُمكن إثباتها إلا بالاعتماد على ما تُدرِكه حواسُّنا الخَمس بالملاحظة والتجربة، فإنّ المبدأ الإيماني الغيبي يَستند على أنّ وجود الغاية أو الغرض هو عامل إضافي يجب أخذه بعين الاعتبار في البحث عن الحقيقة.

اتّبع الأسقفُ ويليام بالي William Paley في القَرن التاسع عشر المبدأ الإيماني الغيبي في الاعتقاد لكي يؤكِّد فرضيته في الخَلق المقدَّس والتي سمّاها: "الإثبات مِنَ الغاية والقصد" ولكي يَنفي نظريةَ داروين في التطوّر، على الرغم من أنّ كلًّا من هاتَين الفرضيتَين يمكن أنْ تفسّر المشاهَدات الواقعية المُثبَتَة آنذاك. في حين أنّ داروين، عندما أراد تفسير أصل الأنواع علميًا، اتَّجَهَ إلى فَهمِ التَّنوع الظاهر والانسجام الواضِح الموجود في عالَم الحيوان والنبات دون اللجوء إلى افتراض وجود غاية أو هدَف محدَّد لها، فبالنسبة إلى داروين، يَعتبر التَّنوع والانسجام نتيجة حتمية لِعمليةٍ عشوائية غير مقصودَة وغير محدَّدة الهدَف، وتؤدي عفويًّا إلى انتقاءِ وانتخابِ الأفضَل والأكثَر نجاحًا في التَّأقلم مع ظروفِ البيئة مِنْ بين كلّ الظَّفرات والتغيرات الوراثية الطارئة. وعلى النقيض مِنْ فرضية داروين المادية، فإنّ فرضيةَ الإثبات مِنَ الغاية والقصد تُفسِّر التَّنوع والانسِجام

في الطبيعة على أنهما مِنْ صُنع قديرٍ حكيم. وهكذا فإنّ فرضية الإثبات مِنَ الغاية والقصد هي فرضيةٌ صحيحة وفقَ المبدأ الإيماني الغَيبي، ولذلك انطلَق بالي متحمِّسًا في نَشرها.

ذكَر بالي في مَعرضِ حِواره الشهير مع داروين فكرتَه عن الإثبات مِنَ الغاية والقصد هكذا: افتَرِضْ أنكَ مسافرٌ في قطار، وشاهدتَ مِنَ النافذة بعضَ الأحجار المرتَّبة على سَفح جَبلٍ قريب بحيث تَكتبُ جملة: "أهلًا وسهلًا في ولاية ماساتشوستس". لعلَّه لَن يَخطُر في بالِكَ أنْ تَشكَّ لحظةً بأنّ هذه الأحجار قد تم ترتيبها قصدًا، وعلى الرغم من هذا، يُمكن أنْ يعتقدَ شخصٌ ما بأنّ هذا الترتيب كان صُدفة مَحضَة حدَثتْ على مرّ سِنين طويلة مِنَ التغيرات الجيولوجية الطبيعية، ويُمكن لِهذا الشخص أنْ يَعتقد بعَدم وجود القَصد والغاية مِنْ وجود الإنسان على الأرض أيضًا. ولكن مهما كان اعتقادكَ وإيمانكَ، فإنكَ إذا صدّقتَ أنّ ترتيبَ هذه الأحجار يدلُّ فِعلًا على وصولكَ إلى ولاية ماساتشوستس، فإنك تؤمِن بالضرورة بصحّة الاستِنتاج الغَيبي الذي يَستندُ إلى القصد والغاية، وإلا فلن يكون تصرفكَ عقلانيًّا... ولا يمكنكَ أنْ تتَّبع طريقَين متناقضَين في الوقت نفسه...!

لنفكِّر الآن بِعَينِ الإنسان: كما هو الحال بالنسبة إلى تلك الأحجار المرتَّبة، فإنّ عَين الإنسان كَعضو حسَّاس يمكن أنْ يُعتبَر وجوده لِغايةٍ وقَصد، أو أنه صُدفة نتَجتْ عن قوى التَّطور العَشوائية. ومهما كان اعتقادكَ وإيمانكَ، فإنكَ إنْ صدَّقتَ عينيكَ كَدليلٍ على مظاهر العالَم من حولكَ، فإنك سَتؤمن بالضرورة بصحّة الاستِنتاج الغَيبي الذي يَستند إلى القَصد والغاية. والخلاصَة: بما أنه يُمكننا تَقديم مُناقَشة مماثِلة حول كل عضو من أعضاء جِسم الإنسان الرائعة، بما فيها الدماغ نفسه، فإننا نَستنتج أنّ جِسم الإنسان قد خُلِقَ بقَصدٍ وغاية.

نَشأتْ في عالَم الرياضيات فلسفَتان مُتعارضِتان بشدة يمكن اعتبارهما بمَثابة تطبيق للمبدأ المادي والمبدأ الإيماني في الاعتقاد والتصديق: يُسمَى أتباعُ الفلسفة المادية في الرياضيات "الشَّكليين Formalists"، وهم يؤمنون بأنّ الرياضيات هي من اختراع العقل البشري، وحَسبَ معتقداتهم، فإنّ الفرضيات الرياضية لا تُشير بالضرورة إلى أي أمرٍ حقيقي، وأنّ إثبات صحة فرضية رياضية ما، لا يَعني سوى أنها اختراعٌ ناجح، مَثلها كمَثل طائرةٍ تَنجَحُ في الطيران. وعلى النَّقيض مِنْ الشَّكليين، يَقِف الأفلاطونيون Platonists الذين يؤمنون بفلسفة شِبه غَيبيَّة، إذ يعتقدون بأنّ الرياضيات، مِثل بقية العلوم، هي وسائل ناجحة تمكِّننا مِنْ اكتشاف الحقائق التي توجَد بالفعل مستقلةً بذاتها عن العقل الإنساني. وحَسب معتقداتهم، فإنّ النظريات الرياضية تُشير بالفِعل إلى أمور حقيقية مستقلّة بذاتِها عن العلاقات الرياضية التي تَصِفُها، وأنّ إثبات صحة فرضية رياضية ما، يشابه إثبات صحة فرضية علمية، مِثل مركَزية الشمس.

يمكنني أنْ أتصوّر احتمال تصادم الشَّكليين والأفلاطونيين في حِوارٍ عن كيفية التَّحقق مِنْ صحة فرضية قديمة، مِثل فرضية غولدباخ - التي لا يُمكِن التَّحقق مِنْ صحتها أو خطئها باستخدام المنطق وَحدَه في عِلم الحساب - يميل الشَّكليون إلى اعتبار مثل هذه الفرضية كاختراع فاشل، وربما اتَّجَهوا إلى الاعتقاد بأنّ اختراعا كهذا لمْ يُمكِن التَّحقق مِنْ صِحَّته بعد 250 سنة مِنَ العمل والبحث فإنه ربما لن يُثبت أبدًا. أما الأفلاطونيون، وكان غودل مِنْ بينهم، فهُم أَميَلُ إلى اعتبار فرضية

غولدباخ وأمثالها كَفرضيات علمية لا يمكن إثبات صِحّتها بالمنطق، ولكنَّها مؤيَّدَة بملاحظات واقعية عديدة، مثلها في ذلك كمَثل الداروينية الحديثة في العلوم الطبيعة.

يؤكِّد اكتشافُ غودل على حتميةِ وجود فرضيات لا يمكن إثباتها بالمنطق. ولذلك، فمِن المؤكَّد أنّ خلافاتٍ كَهذه سَترِد في عالَم الرياضيات كما تَرِد في الخلافات حول وجود الله في عالَم الطبيعة. وخلال ذلك، فإنّ عالَم الرياضيات المعاصِر هو عالَمٌ لا تَنطَبق فيه الحقيقةُ الرياضية على البرهان المنطقي دائمًا، بل إنّ مجرَّد الثقة والتصديق بصحة البرهان المنطقي هي قضيةُ إيمان واعتقاد، ويعود هذا إلى أنّ غودل قد بَيَّن لَنا أنّ أيّ مَنهجٍ منطقيّ لن يستطيع إثبات كل الفرضيات الرياضية الصحيحة فعلًا، بل إنّ أي منهج منطقي لا يستطيع أنْ يثبت انسجامه المنطقي ذاته...! أي بكلمة أخرى، إنّ الثقة بالمنطق لا تقلّ ذاتيةً عن الإيمان بالمبدأ المادي أو بالمبدأ الغَيبي في الاعتقاد والتصديق، لأنّ المنطقَ ذاته لا يُمكن إثبات صحته منطقيًّا وموضوعيًا.

لا يَعني كل ما سَبق أنّ الفهم التقليدي للمنطق في الرياضيات كَيقينٍ لا يَتعرَّض إليه الشك، لا يُمكن أنْ ينسَجم مع اكتشاف غودل. لِنتذكَّر فرضيةَ دَوران الكواكِب والشمس حول الأرض (مركَزية الأرض) التي كانت تُعتَبر ذات يوم كالمنطِق يقينًا لا يَتعرَّض إليه الشك، لأنها استَندتْ إلى إيمانٍ شِبه غيبيّ بِقُدسِيَّة الحياة على الأرض، ففي السنوات الأخيرة أُدخِلتْ فكرة مركَزية الأرض مِنْ جديد في حقائق العلوم الحديثة عن طَريق إدراكِ أنّ الأرض تَشغلُ بالفِعل مَكانًا متميّزًا في المجموعة الشمسية، وهو المكان الوحيد الذي يمكن أنْ توجَد فيه الحياة، رغم أنّ هذا المكان ليس في مركز المجموعة الشمسية مِنَ الناحية الهندسية. ولربما يستطيع علماء الرياضيات في السنوات القادمة أنْ يعيدوا الاعتبار إلى الثقة القديمة بيَقينية المنطق في الرياضيات، ويُعيدوا إدخالها في حقائق الرياضيات الحديثة. لقد أزاحَ اكتشافُ غودل المنطقَ مِنْ مَكانه المركَزي في عالَم الرياضيات، ولكنه بعَملِهِ هذا دفَعَنا إلى البَحث عن مَكانٍ لا مركزَيّ، ولكنه متميّز، لذلك المبدأ النادر من مبادئ الاعتقاد والإيمان: ذلك النوع مِنَ الإيمان الصادق العميق الذي يَعترِف بِقصورِه.

المرحلة الثالثة

التفاؤل Optimizing

الكرة البلّورية غير الصافية

الإحصاء ونظرية الاحتمالات

Statistics and Probability Theory

"في العدد القليل من الأمور التي نستطيع معرفتها بشيء من اليقين... فإن الوسائل الأساسية في إثبات الحقيقة تعتمد على الاحتمالات".

بيير سيمون دو لابلاس Pierre Simon de Laplace

كل ما توصَّل إليه علماء الفيزياء عن العالَم الطبيعي يَدعونا إلى قبول الشك وعدم التأكُّد، حتى سلوك الذرات الذي تَصَور العلماء ذات يوم أنهم يستطيعون تحديده والتَّنبؤ به بدقَّة، اتَّضَح لنا الآن أنه ليس كذلك. نستطيع أحيانًا أنْ نتَنَبأ بالسلوك والتَّصرف الذي لا يمكن توقُّعه، ونَعتمِد في ذلك على نظرية الاحتمالات في الرياضيات وفرعها الحديث: عِلم الإحصاء، وتُعتَبر هذه الوسائل في بعض الحالات الطريقة الوحيدة التي تمكِّننا مِنْ جَعل عالَمنا المجهول عالَمًا يمكن التَّنبؤ بما سيَحدث فيه.

هناك أشياء يُمكِننا تحديد سلوكها بدقّة، مِثل حركة القمر حول الأرض. وهناك أشياء لا يُمكِننا تحديد سلوكها ولا التَّنبؤ بها إطلاقًا، مِثل اختيار عَدد بشكلٍ عشوائي مِنْ مجموعة الأعداد الحقيقية. وهناك أشياء يقَع سلوكها بين الحالتَين السابقتَين، مِثل سلوك حَجر النَّرد عند رَميِه، إذ لا يُمكِننا تحديد هذا السلوك تمامًا، ولكن يُمكِننا التَّنبؤ به بصيغة الاحتمالات.

نُشاهد نماذج السلوك الحتميّ الذي يُمكِن التَّنبؤ به تمامًا في الأشياء التي تَخضَع في حركتها دائمًا لِقوانين صارِمة، ويُمكن مَعرفة مستقبل هذه الأشياء والتَّنبؤ به بدقَّة بالاستِناد إلى معرفة حالتها الحالية، ومعرفة القوانين التي تُسيطر على حركتها وتطوّرها، فمَثلًا تتَصرَّف الأجسام السماوية بشكل حتميّ، لأنّ حركتها تخضَع بشكل تام لقوانين الجاذبية. وبسبب النجاح المَبدئي الذي تَحقَّق في التَّنبؤ بحركة الأجسام السماوية، مِثل مُذنَّب هالي Hally`s Comet افترَضَ أغلب علماء القَرن الثامن عَشر أنهم يستطيعون التَّنبؤ بسلوك أيّ شيء وكلّ شيء، حتى سلوك الإنسان بالدقَّة ذاتها، ولعله مِنَ الثابت لدَينا الآن أننا نستطيع التَّنبؤ بعودة مُذنَّب هالي بدقّة أكبر بكثير مِنْ قدرتنا على التَّنبؤ بأي شيء آخَر تقريبًا.

مِنْ ناحية أخرى، يمكن أنْ نَجد نماذج السلوك العشوائي في الأشياء التي لا تخضَع لأيّ قانون، ولكنّ مِثل هذه النماذج المتقلِّبة نادرة جِدًّا، وربما غير موجودة إطلاقًا، إذ لمْ يتمكَّن علماء الفيزياء ولا علماء المجتمع حتى الآن مِنْ اكتشاف أية ظاهرة طبيعية عشوائية تمامًا لا يُمكِن التَّنبؤ بسلوكها إطلاقًا، ويبدو أنّ هذا يُناسب أغلب العلماء ويَروق لهم تمامًا، لأنّ العِلم يَعتمِد أساسًا على الإيمان بالحتمية، وعلى الثقة بأنّ الكَون يخضَع لنظام عقلاني منظَّم لا مَكان فيه للفوضى ولا للسلوك العشوائي اللامعقول.

إنّ عدم وجود أي نموذج للسلوك العشوائي والفوضى في العالَم الطبيعي يَجعلُ مِن الصعب على علماء الرياضيات الذين يهتمّون بدراسة الفوضى أنْ يتوصَّلوا إلى نماذج عشوائية تمامًا، وحَسب عِلمي، يُمكِن في الحقيقة التَّنبؤ ببَعض جوانب سلوك أي مِنَ النماذج العشوائية التي تم تصميمها حتى الآن. بين هذَين الجانبَين المتطرفَين: جانب التَّنبؤ اليقيني، وجانب العشوائية الكاملة، يقَع سلوكُ أغلب الأشياء التي نراها في عالمنا الواقعي، وهو سلوكٌ لا يخضَع لأي قانون على مستوى العنصر الواحِد، إلا أنه يخضَع لقوانين صارِمة على مستوى مجموعة العناصر. وهذه هي الطبيعة المتناقِضة للسلوك الاحتمالي، وهو السلوكُ الذي لا يُمكِن وَصفه إلا بلغة الاحتمالات. فمثلًا: في غرفةٍ مملوءةٍ بجزئيات الهواء، وهذا نموذجٌ للسلوك الاحتمالي، فإنّ سرعة أيّ مِن هذه الجزئيات يُمكِن أنْ تقَع بين الصفر و186000 مِيل في الثانية (وهي سرعة الضوء)، أي أننا إذا أضفَينا صِفات بشريّة على هذه الجزئيات، يُمكِن القَول إنّ كل جزيء يمتلكُ مطلَق الحرية في اختيار السرعة التي يرغَب في التحرك وفقَها، ولكن في الوقت نفسه، فإنّ قانونًا في عِلم الدّيناميكا الحرارية (عِلم فيزياء الطاقة) يَفرض سلوكًا منظَّمًا يمكن التَّنبؤ به على مجموع الاختيارات الفردية الحرّة، وحَسب هذا القانون، فإنّ بعض السرعات يتم اختيارها أكثَر أو أقلّ مِنَ السرعات الأخرى بما يتَناسَب مع ارتفاع أو انخفاض درجة حرارة الغرفة.

تُشبه حالة الغرفة المليئة بجزئيات الهواء حالةَ غرفة مملوءة بالجائعين بعد أنْ أُعلِن لهم أنّ كلّ فَرد جائع منهم يستطيع اختيار إحدى وَجبات ثلاث، ولكن هناك عددٌ محدودٌ مِنْ كلّ نَوع مِنْ هذه الوجبات. تُمثِّل هذه الحالة نوعًا مِنَ الفوضى والحتمية في الوقت نفسه، تَمنَحُنا نظريةُ الاحتمالات الوسائلَ الرياضية التي تمكِّنُنا مِنَ التَّنبؤ بمستقبل الحالات الاحتمالية بأقصى قَدر مُمكِن مِنَ الدقَّة. ففي حالة الغرفة المليئة بجزئيات الهواء، نستطيع التَّنبؤ بتَطورها العام ككلّ، ويُمكِننا القول في هذه الحالة ببساطة أنّ جزئيات الهواء ستظلّ مَحصورة في الغرفة تحت درجة حرارة ثابتة طالما أنها لمْ تتعرَّض إلى أي تغيير، ولكن لا يُمكِن التَّنبؤ بمصير كل جزيء على وَجه الخصوص والتحديد، ولا يخضَع كل جزيء لهذا الحُكم العام.

توضّح نظرية الاحتمالات أولًا ما الذي نَعنيه بالضبط بكلمة "احتمال"، وهذا ما يُعرَف نظريًّا بأنه النسبة المئوية التي تَتحقَّق فيها حالَةٌ ما في عملية احتمالية، مِثل إلقاءِ زَوجٍ مِنَ النَّرد. عندما نقول في عملية إلقاء زَوج النَّرد أنّ احتمال الحصول على زَوجٍ مِنَ العدد ستَّة هو ثلاثة بالمئة، فهذا يعني أننا سنَحصل على زَوج مِنَ العدد ستة بمعدَّل ثلاث مرات تقريبًا في كل مئةِ رَميَة، ولا يعني هذا أنّ زَوجًا مِنَ العدد ستة سيَظهَر حتمًا كلما ألقينا بزَوجِ النَّرد مِئة مرّة.

مِنَ الواضح أننا لا نستطيع تطبيق تعريف الاحتمال حرفيًّا لأننا لا نستطيع إلقاء زَوجِ النَّرد، أو تكرار أية عملية احتمالية عددًا لانهائيًّا مِنَ المرات لكي نَعلَم احتمال حدوث ظاهرة أو حالةٍ معينة، ولكن حَسب نظرية الاحتمالات، نستطيع حساب قيمة قريبة جِدًّا مِنَ الاحتمال النظري إذا عرفنا نتائج القيام بعملية احتمالية عددًا كبيرًا مِنَ المرات. وكلما زادَ عَدد مرات التجربة، اقترَبَ حِساب الاحتمال مِنْ قيمة محدَّدة، هذه القيمة المحدَّدة هي الاحتمال النظري أو هي عدد قريب جِدًّا منه.

يَذكُر العلماءُ الذين يَدرسون مُعَدَّلات المواليد ومُعدَّلات رَمي قطعة النقود على مَرِّ السنين أنّ احتمال كَون جِنس المولود ذكَرًا يساوي تقريبًا احتمال سقوط قطعة النقود بحيث يكون الوَجه المطبوع عليها نحو الأعلى، وهذا يساوي 51 مِنْ كل 100 محاولة تقريبًا. هذه الاحتمالات هي احتمالاتٌ مُقاسَة فقط، ولكنها تَستند إلى دراسَة عددٍ كبير جدًّا مِنَ الملاحظات يساوي عشرات الملايين، بحيث إننا نتوقَّع كَونها قريبة جدًّا مِنَ الاحتمال النظري الدقيق.

بينما توضّح نظريةُ الاحتمالات ما نَعنيه بالسلوك الاحتمالي، فإنّ عِلم الإحصاء المتفرِّع عنها يَدلّنا على الأساليب التي تُمكِّنُنا مِنْ معرفة الجوانب الحتمية المؤكَّدة التي يُمكِن التَّنبؤ بها في السلوك الاحتمالي. وهكذا يستطيع علماءُ الإحصاء بأساليبهم الرياضية أنْ يتوقَّعوا نتائج عملياتٍ تبدو في الظاهر لأول وَهلة عمليات عشوائية وغير محدَّدة النتائج، أي أنّ علماء الإحصاء مِنْ هذه الناحية هُم أكثَر ما تقدِّمُهُ الرياضياتُ الحديثة شَبَهًا بالكَهَنَة والعَرَّافين.

لعلّ أهمّ رُكنٍ في عَملِ الإحصائي هو مفهوم اختيار العيّنة الإحصائية، لأنّ كل ما يمكن أن يَستنتِجُه الإحصائي عن السلوك الاحتمالي لمجموعة ما، سواء كان ذلك حركة مجموعة مِنْ جزئيات الهواء في غرفة، أو تغيّرات السكان في دولة، إنما يَستنبطُه مِنْ دراسة سلوك عَيِّنة مِنْ هذه المجموعة. مِن حيث المبدأ، فإنّ الأفراد الذين ينتَسبون إلى العيّنة الإحصائية يجب أنْ يُمثِّلوا المجموعة كلها بشكل صحيح وصادق وتامّ، ومِن الناحية العملية الواقعية، يُمكِن عادةً اختيار عَيِّنة تُمثِّل مَجموعتها في بعض النواحي الواضحة فقط، وفي مجموعة مِن الناس تَشمَل هذه النواحي مثلًا العُمر والجِنس والعرق والدَّخل المادي... يَتبع علماء الإحصاء أساليب خاصة في اختيار العيّنة الإحصائية التي تُمثِّل مجموعتها بشكلٍ صحيح وتامّ، وإنّ نجاحهم في هذا الاختيار يُحدِّد مَدى صِحة الاستنتاجات التي سيتوصَّلون إليها.

تَختلفُ أساليب اختيار العيّنة الإحصائية حَسب كفاءة عملية جَمع العيّنة، وحسب طريقة التأكّد مِن كَونها مُمثّلة صحيحة لِمجموعتها، وعوامل أخرى تتعلّق بأسلوب البحث المتَّبع. وتُعتبر أساليب عالِم الإحصاء جورج غالوب[69] George Gallup مِنَ الأساليب المُعترَف بنجاحها في التوصُّل إلى توقُّعات صحيحة لِنتائج التغيرات في المجموعات ذات السلوك الاحتمالي. ومِنَ الواضِح أنّ مؤسسة غالوب تَستخدِم أساليب تعطي نتائج سريعة (إذ يقوم الباحثون باستِخدام التليفون والمقابلات المنزلية المباشرة في جَمع معلوماتهم بسرعة وكفاءة) ويتوصَّلون إلى نتائج موثوقة (يوجَد في مكتبة مؤسَّستِه معلومات كثيرة عن السكان في أمريكا. تُرشِد هذه المعلومات علماءَ الإحصاء لِعملية جَمع العيّنة الإحصائية التي تُمثِّل السكان بشكل صحيح). وعندما يتمّ جَمع العيّنة الإحصائية، يَدرس الإحصائيون سلوكَ أفرادِها ومُكوِّناتها لاكتشاف النواحي الحتمية فيه، بحيث يُمكِنهم التوصُّل إلى تَنبؤات صحيحة وتوقُّعات دقيقة عن سلوك المجموعة كلها. تُسمَّى هذه النواحي الحتمية بالإحصائيات. ومِنْ بين الأنواع الكثيرة التي توصَّل إليها علماءُ الإحصاء مِنْ هذه الإحصائيات، فإنّ ثلاثة منها على وَجه الخصوص تَلعَب دَورًا كبيرًا في توقُّع السلوك الاحتمالي وهي: النّسَب المئوية والمُعَدَّلات والعلاقات الإحصائية.

النسبة المئوية الإحصائية هي بكل بَساطة النسبة المئوية للأفراد الذين يَتبعون نمَطًا معينًا من السلوك في العيّنة المدروسَة: فمَثلًا في حالَة جزئيات الهواء في الغرفة، فإنّ هذا العدد الإحصائي هو النسبة المئوية للجزئيات التي تتحرك بسرعة معيّنة، ومَعرفة هذه النسبة تُمكِّن عالِم الإحصاء مِنَ التَّنبؤ بسرعة انتشار الجزئيات إذا تَحرَّرتْ فجأة. تَكمُن صعوبة التحدي الذي يواجِهه الإحصائي في مَعرفة النّسب التي يمكنه الاستفادة منها مِنْ بين النّسب الإحصائية الكثيرة التي توصَّل إليها، وما هي النتائج الصحيحة التي تدلُّ عليها هذه النّسب. وقد يكون لسؤالٍ مثل هذا السؤال أكثر من إجابةٍ واحدة فقط، ولهذا فإن البحث عن الجواب الصحيح ضمن الأجوبة الكثيرة المتوفرة يتطلَّب من الفاحص دقَّةً وعناية فائقتَين، وهذا ما دَفع علماء الرياضيات إلى وَصف عِلم الإحصاء بأنه فَنٌّ وعِلم...!

جَعلَتْ مؤسسةُ نيلسون A.C. Nielsen مِن قياس النّسب الإحصائية لِحساب محطّات التليفزيون عمَلًا تجاريًّا ناجحًا، وتَتَألف عَيّنتهم الإحصائية مِنْ 1500 جهاز تليفزيون موجود في بيوتِ أناسٍ تمّ اختيارهم كَعَيّنة عشوائية تمثِّل المجتمع الأمريكي، ويُطلَب مِنْ سكان كلّ بَيت مِنْ هذه البيوت الاحتفاظ بقائمة برامجهم التليفزيونية المفضَّلة، ثم بالاستناد إلى هذه المعلومات، تقوم مؤسسةُ نيلسون بحساب نسبة الذين شاهَدوا البرامج التليفزيونية المختلفة. وتُسمّى هذه النّسب: تَرتيب نيلسون، الذي يَستخدِمه رؤساءُ الشركات التليفزيونية لِيقرّروا أي من البرامج سيستمر عَرضُه وأيها سَيتوقَّف. لقد أصبَحتْ عاداتُنا في مشاهدة التليفزيون معروفة جيدًا لشركات البرامج التليفزيونية، حتى أصبح بإمكانها التَّنبؤ بنجاح البرامج قَبل عَرضِها. يوضِّح هذا الأمر التَّناقض الكامِن في السلوك الاحتمالي: لا يُمكن التَّنبؤ باختياراتنا على مستوى الأفراد، لأن لدَى كلٍّ مِنا الحرية الكاملة في اختيار البرنامج التليفزيوني الذي يشاء، ولكن يُمكِن التَّنبؤ جيدًا باختياراتنا كمجموعة مِن المُشاهدين...!

يوضِّح المُعدَّل الإحصائي بشكلٍ آخَر بعض الجوانب الحتمية التي يُمكن التَّنبؤ بها في السلوك الإحصائي، ويُعَبِّرُ المُعدَّل الإحصائي عادةً عن السلوك المتوسط، أو الحالة المتوسطة التي تُمثِّل مختلف الحالات الموجودة في العَيِّنة الإحصائية المَدروسَة. وهذه الحالات تمثِّل بدَورها الحالات الكثيرة الموجودة في السلوك الاحتمالي العام قَيد البحث. كلما زادَ انتشار سلوك معيّن في مجموعة من الناس، كتَفضيل الشوكولاتة مثلًا، ازدادَ وضوح هذا السلوك، وازدادَت قوة تأثيره على السلوك المتوسط.

تَعتمِد شركات التأمين بشكل كبير على مَفهوم المُعَدَّل الإحصائي وعلى عِلم الإحصاء بشكل عام، إذ تُعتَبر المُعدَّلات الإحصائية أساس جداول التأمين التي يَعتمدون عليها في تحقيق أرباحهم. وإنّ الربح الذي تُحقِّقُه شركاتُ التأمين على الحياة هو شاهِد على إمكانية التَّنبؤ بالسلوك الاحتمالي، وعلى النجاح الذي يُمكِن أنْ تُحقِّقه الرياضيات في التَّنبؤ بمستقبل شيءٍ يبدو مِن المستحيل ظاهريًّا أنْ يتَنبأ به أَحَد، مِثل معرفة متى سَنموت، بل والرِّهان على ذلك...! تُخبِرنا شركاتُ التأمين على الحياة هذه الأيام بدقّة عن متوسط عُمر الأشخاص الذين لدَيهم عادات مشابِهة لِعاداتنا وشخصيتنا ووراثتنا وعِرقنا ودَخلنا المادي وهكذا...

أما النوع الثالث الذي نَستخدِمه في الإحصاء للكَشف عن الجوانب الحتمية في السلوك الاحتمالي فهو العلاقات الإحصائية. يجب على عالِم الإحصاء أنْ يَدرس عَيِّنَتَين مختلفتَين على الأقل لكي يتوصَّل إلى العلاقة بينهما، وتكون إحدى هاتَين العَيِّنتَين دائمًا عَيّنة مُختارة، تمثِّل المجموعة التي يريد دراستَها، وتُسمى عيّنة المُقارَنة، في حين تكون العيّنة الأخرى مؤلَّفة بشكل رئيسي من عناصر تتميز بناحية أو بصِفة محدَّدة كَتدخين السجائر مثلًا. إذا أَظهرت المُقارَنة الدقيقة بين هاتَين العَيِّنَتَين أي اختلاف مؤكَّد، فإنّ هذا الاختلاف سَيُعتَبر متعلِّقًا بالصِّفة المميّزة للعَيِّنة الثانية (أي التدخين). وفي الواقع، فقد وجَد العلماءُ فعلًا أنّ نسبة سرطان الرئة هي أقل في مجموعة المُقارَنة منها في مجموعة المدخِّنين، ولذلك يُمكِن القول إنّ سرطان الرئة يتعلّق بالتدخين، كما تُبيِّن هذه العلاقة أيضًا أنّ الشخصَ المدخِّن أكثَر تعرُّضًا للوفاة بسرطان الرئة، وأنه أكثَر تعرُّضًا للوفاة في سِنّ أصغَر من الشخص غير المدخِّن. تُعتبرُ مِثل هذه العلاقات هامّة جِدًّا لشركات التأمين على الحياة، لأنها تُبيِّن لهم مَن مِن زبائنهم أكثَر عُرضَة للخطر، وأيُهم أكثر أمانًا. وقد استَخدَمتْ بعض شركات التأمين هذه العلاقات الإحصائية كأساس لِبرامج الدعاية التي يقومون بها، ويقدِّمون فيها بوليصات تأمين رَخيصة للزبائن غير المُعَرَّضين للخطَر. فمثلًا نُشاهِد هذه الأيام بعض الشركات التي تَعرُض بوليصات تأمين على الحياة بأسعار رَخيصة جِدًّا للنساء البِيض اللواتي بلَغنَ متوسط العمر ويتمتَّعن بصحة جيدة، ولا يُدَخِّنَّ السجائر، ولا يَقُدنَ السيارات... وقد استَندتْ هذه العروض إلى العلاقات الإحصائية التي ربَطتْ بين سرطان الرئة والتدخين، وبين حوادث السير وسنّ الشباب، وبين الوفاة العنيفة والشباب الذكور مِن العرق الأسود، وانخفاض متوسط العمر لدَى الذكور بشكل عام.

مِنَ المؤسف أنّ تلك الوسائل التي نَستخدمها في التَّنبؤ بنتائج السلوك الاحتمالي يُمكِن أنْ تُستخدَم أيضًا في التأثير على ذلك السلوك عَفوًا أو قَصدًا. فمثلًا، عندما تُبيّن لنا الإحصائياتُ جوانبَ من سلوكنا الاجتماعي، فإنها تُؤثِّر على الاختيار الحرّ لكل فَرد منّا لدَرجة أنها تلغي تقريبًا تلك الناحية العشوائية البريئة في سلوكنا الاجتماعي الحرّ. تحت هذا التأثير، يمكن التَّنبؤ بسلوكِنا وتصرفاتِنا الجَماعي، مثلما يُمكِن التَّنبؤ بحركة مُذنَّب هالي الحتمية.

يَعتقدُ بعض الصحفيين أنّ ظاهرة كهذه، ربما تكون قد حَدثتْ فِعلًا في الانتخابات الأمريكية التي جَرتْ سنة 1980 بين ريغان وكارتر، فقَبْل ساعاتٍ فقط من انتهاء إجراءات الانتخاب في الولايات الغربية من أمريكا، كانت شبكاتُ التلفزيون قد أعلَنتْ توقُّعاتها بنَجاح ريغان بِناءً على بعض النتائج في الولايات الشرقية، وعلى الرغم من أننا لا نَعرف تمامًا مدَى تأثير ذلك على الناخِبين في الولايات الغربية، إلا أنّ هذه التوقُّعات ربما تَكون قد أثَّرتْ فِعلًا بتَثبيط أو بتَحريض الناخِبين في إعطاء أصواتهم للناجِح أو للخاسِر، أو بعدَم التصويت على الإطلاق.

يُمكِن أنْ تُستعمَل الإحصائيات بشكل سيئ أو مُتحيِّز ضد سلوك معيَّن، أو ضد أناس معيَّنين، وكمثال على ذلك فإنّ نتائج كثير من الإحصائيات والمعدَّلات التي تصِل إليها تؤثِّر بشكل مباشر على تصرفات كثير من رجال الأعمال، وقد تدفَعهم الإحصائيات إلى امتِناعهم عن تشغيلِ أفرادٍ لا تنطَبقُ أوصافُهم على أوصاف رَجُل الشركة المثالي المُنتِج. وبالمِثل، لا يريد أصحاب المطاعِم مَثلًا أنْ يَخدموا النساء غير المتزوجات، لأنّ الإحصائيات أظهَرتْ أنَّهنَّ يَدفَعن أقلَّ، ويَطلُبن مائدةً أفخم مِنَ الآخرين بشكل عام.

حتى عندما تَنطَبق الإحصائيات بشكل صحيح ودقيق على السلوك الواقعي، فلا تبدو فائدتها واضحة في التَّنبؤ بالتصرفات الإنسانية التي أثبَتَ التاريخ أهميتها وتأثيرها العميق على مستقبل الإنسان، وذلك لأنّ عِلم الإحصاء لا يكشِف لَنا إلا تلك الجوانب التي يُمكِن التَّنبؤ بها في سلوك الإنسان، إلا أنه لا يَدلّنا بشيء على الجوانب التي لا يُمكِن التَّنبؤ بها، على الرغم من أنّ هذه الجوانب الحرّة هي التي أثبَتتْ خطَرها وأهميتها وتأثيرها البعيد على مَرّ التاريخ. إنّ الاختراعات المهمة، مِثل المحرك البخاري والحاسوب، لمْ تأتِ بها عقول أشخاص مِنْ أصحاب المستوى العادي مِنَ الذكاء. وبشكل عام، فإنّ ظهور عباقرة، مِثل سقراط ونيوتن وأينشتاين هو أمرٌ لا يُمكِن توقّعه، وهو في الوقت نفسه أمرٌ عميق التأثير، حتى إنه يُمكِننا القول إنّ تأثير وجودهم على تاريخنا هو أمرٌ عشوائي وعفوي تمامًا.

لعله مِنَ الطبيعي أنْ نتساءل، هل سَنتمكَّن ذات يوم من التوصُّل إلى أساليب رياضية تُمكِّنُنا مِنَ التَّنبؤ بالجوانب العشوائية العفوية مِنَ السلوك الاحتمالي، مثلما تَوصَّلنا إلى الأساليب الإحصائية التي تُمكِّنُنا مِنَ التَّنبؤ بالجوانب الحتمية مِن ذلك السلوك؟ إذا استطَعنا اكتشافَ مِثل هذه الأساليب، سَنتمكَّن مِنَ التَّنبؤ بسلوكِ وتصرفات الإنسان، وربما استطَعنا التَّنبؤ بمستقبل البشرية ومستقبل الكَون. إنّ احتمال حدوث ذلك يبدو بعيدًا جِدًّا عنّا، ولكنه ليس احتمالًا مستحيلًا يساوي الصفر، لأنه بسبب كَون أحَد جوانب تَصرفاتنا وسلوكنا هو جانبٌ حرٌّ وعفويّ وعشوائيّ لا يُمكِن التَّنبؤ به، فإنّ ما يبدو مستحيلًا هو أمرٌ مُحتملٌ قابلٌ للحُدوث دومًا.

بين الضَّامَة والشطرنج:

نظرية المباراة بين شَخصَين

Two-Person Game Theory

"إذا لم يلعَب سوى العقل الرَّصين،

يختفي إشراقُ الخيال الجامِح

وتذوب تماثيل الثلج الرائعة".

روجرز Rogers

من قصيدة متعة الذكريات

يُذْكَر دائمًا أنّ الإنسان يتميَّز عن الحيوانات بقدرتِه على التفكير، وكنتُ دائمًا أعتَبرُ هذه الملاحظة أعمَق من مجرَّد تَعبير مُبهَم عن إعجابنا بأنفسنا. ما الذي تتألفُ منه هذه القدرة على التفكير؟ وكيف يُمكِننا تقديرها؟ وكَم لدَينا مِن هذه القدرة الغامضة؟ إذا استطَعنا الإجابة على هذه الأسئلة، فإننا سنتَمكَّن مِن تقييم أنفسِنا بالنسبة إلى بقية المخلوقات بدقَّة ووضوح، ونَضع أنفسَنا في المكان الصحيح.

سأُبيِّن هنا أحد الأساليب التي توضِّح شيئًا مِن ذلك، وهي نظرية المباراة Game Theory: أي الدِّراسة الرياضية للتَّنافس العقلي. سأركِّز في المناقشة هنا على نظرية المباراة بين شخصَين ذات المجموع الذي يساوي الصِفر (المباراة الصّفرية)، وهي الدِّراسة الرياضية للتنافس العَقلي بين لاعبَين حين يكون رَبحُ أحدِهما خسارةً ضروريةً للآخَر بِحُكم قواعد اللعبة، مثلما هو الحال في لعبة الشطرنج ولعبة الضّامَة. يُمكن اعتبار هذا النوع مِنَ نظرية المباراة طريقة مناسِبة لِدِراسة قُدرتنا على التفكير، لأنها تَدرس منافسَة عقلية بَحتة لا دَور فيها للعواطف والانفعالات، في حين تلعَب العواطف والانفعالات دَورًا في الألعاب والمباريات ذات المجموع الذي لا يساوي الصِفر (المباراة اللاصفرية)، حيث ليس ضروريًّا فيها أنْ تَتوازن أرباح وخسائر اللاعبين دائمًا، وذلك كما هو الحال في تَنافس التجار في السُّوق مثلًا، وفي الألعاب التي يَشترك فيها ثلاثة لاعِبين أو أكثَر. تُمَثِّلُ نظرية المباراة الصِفرية بين شخصَين مَسرحًا نموذجيًّا لِدراسة قدرتنا على التفكير والمحاكَمة بسبب اعتمادها على حقيقة أنّ رَبح أحَد اللاعبَين يَرجِع أساسًا إلى قدرته على التفكير والمحاكَمة.

في نظرية المباراة، توضَعُ فرضياتٌ معيَّنة تُحدِّد نوعَ المنافسَة وشُروطها بحيث تَضمَن عَقلانية اللّعبة، وهذه الفَرضيات هي قواعِد اللّعبة. فأولًا وقَبل كل شيء يُفترَض أنّ اللاعبَيْن متكافِئان، أي أنّ كلًّا منهما سَيواجه الحِيلة بالحِيلة والذكاء بالذكاء والدَّهاء بالدَّهاء. كما يُتوقَّع مِنْ كلٍ مِنَ اللاعبَين أنْ يُقَلِّبَ الرأي في كل الاحتمالات والاختيارات المُتاحَة قَبل أنْ يُقرِّرَ حَركَته التالية بهدوء ونزاهَة وحكمَة. كما سَنفترضُ مِنْ ناحيتنا أنّ لدَى كلٍ مِنَ اللاعبَين اطِّلاع كامل على تفاصيل اللّعبة وكل جوانب تَطوّرها في كل لَحظة. تُسمّى الألعابُ التي يَنطَبقُ عليها هذا الشَّرط بألعاب الاطِّلاع الكامل، وفي هذه الألعاب، مِثل الضّامَة والشطرنج، لا توجَد أسرار بين اللاعبَين، بعكس الحال في ألعاب الاطِّلاع غير الكامل، مثل البوكِر والبريدج وغيرها مِنْ ألعاب ورَق اللَّعب.

سَنتَّخِذ مِنْ أهمّ نتائج دراسة نظرية المباراة في مِثل هذه الألعاب أساسًا لِتقييم قدرتنا على التفكير. أثبتَ عالِمُ الرياضيات الألماني جون فون نيومان[70] John von Neumann سنة 1921 أنّ كل لعبةٍ مِنْ ألعاب الشخصَين ذات المجموع الذي يُساوي الصِّفر، والتي يُشترَط فيها الاطِّلاع الكامل، لا بد وأنْ تحتوي على ما يُمكِن تَسميته بالاستراتيجية المُثلَى الخاصة بها. وتسمَّى هذه الاستراتيجية بالمُثلى، لأنّ كل لاعِب في مِثل هذه الألعاب لا يُمكِن أنْ يفعل شيئًا أفضَل مِنْ تأدية دَوره وفقَ الاستراتيجية المُثلى لهذه اللّعبة. ولكي نفهَم ذلك، لِنتذكَّر أولًا أنّ اللاعِب حَسب نظرية المباراة يواجِه دائمًا خَصمًا يُساويه في مَهاراته وأدائه، أي أنّ اللاعِب الأول مَثَلًا يدركُ في كلّ لَحظَة أنّ اللاعِب الثاني يَلعَب بكَفاءة مُساوية لِكفاءته سَعيًا وراء الربح. في مِثل هذه الأحوال، فإنّ الاستراتيجية المعقولة الوحيدة المتاحَة للاّعِب الأول هي أنْ يُحاول تقليل إمكانيات الربح أمام اللاعِب الثاني، وبذلك يُخفِّف في الوقت نفسه احتمالات خسارته هو. وبما أنّ هذه الأفكار ذاتها تَدور أيضًا في ذِهن اللاعِب الثاني، فإنّ أقصَى ما يَطمَح إليه اللاعِب في مِثل هذه الألعاب هو أنْ تَنتهي اللّعبة بحيث يَبقَى هو في أفضَل وَضع مِنَ أسوأ الأوضاع المُمكِنة، وهذا هو تعريف الاستراتيجية المُثلى. عندما يَتبَع اللاعِب الاستراتيجية المُثلى، فإنه يلعَب بارتياح وهو يفكِّر في نفسِه بشيء كَهذا: بما أنّ اللاعِب الآخر يُساويني في الذكاء، ولدَيه الوسائل ذاتها، ويَسعى مِثلي إلى الربح، فمِن المُمكِن أنْ أنتَهي إلى وَضع أسوأ، ولكنه لا يُمكِن أنْ يكون أفضل (لأنه يَتبَع الاستراتيجية المُثلى).

تَنحَصر الاستراتيجيةُ المُثلى في واحدة مِن مَقولتَين: عادِلة أو غير عادِلة بحَسب ما إذا كانت الاستراتيجية المُثلى تَضمن التعادل أو الربح لأحَد اللاعبين. فمثلًا في لعبة المربَّعات Tic-tac-toe (وهي لعبة بين شخصَين ذات مجموع يساوي الصفر ويُشترَط فيها الاطِّلاع الكامل) الاستراتيجيةُ المُثلى فيها هي عادلة، وهناك دائمًا طَريقةٌ مُثلى في لَعبها بحيث تضمَن التعادل مع أي خَصم (الحركاتُ الأولى في الاستراتيجية المُثلى لهذه اللعبة هي الحاسِمة، إذ يجب أنْ يأخُذ اللاعِب الأول إحدى الزوايا، وأنْ يردّ اللاعِب الثاني بأخذ المَركَز).

في لُعبة نيم Nim، وهي لُعبة قديمة منْ ألعاب الشخصَين ذات المجموع الذي يساوي الصفر، والتي تَشترطُ الاطِّلاع الكامل، توضَع مجموعة من العِيدان في ترتيب معيّن يتم الاتفاق عليه وعلى عدد العِيدان الكلي، بالإضافة إلى عدد العِيدان التي يمكن للاّعب سَحبَها في كل مرة،

ومِن ثمّ يأخذ كل من اللاعبين بالتناوب عَددًا مِنَ العيدان يوافق ما اتَّفق عليه مسبقًا، والفائز هو اللاعِب الذي يأخُذ العود الأخير. الاستراتيجيةُ المُثلى في لُعبة نيم هي استراتيجية غير عادلة، لأنها تقضي أنْ يفوز اللاعِب الأول وأنْ يخسَر اللاعِب الثاني دائمًا.

وجودُ الاستراتيجية المُثلى للألعاب ذات المجموع الذي يساوي الصفر والتي تَشترط الاطِّلاع الكامل، يُتيح لنا الفرصة لتقييم وقياس قدرة اللاعِبين على التفكير والمحاكَمة في هذه الألعاب. وتَكمُن هذه الفرصة بملاحظَة أنّ اللّعبة تفقَد جاذبيتها وإثارتها لدَى اللاعِبين الذين يَعرفون استراتيجيتها المُثلى، أي أنه إذا عَرف اللاعبان الاستراتيجيةَ المُثلى للُعبة ما، فسَيعرفان نتيجةَ اللُّعبة حتى قَبل البدء بها، ولن يكون لدَيهما الدَّافع والرغبة لِمُمارسة هذه اللعبة أبدًا.

عندما تكونُ الاستراتيجيةُ المُثلى للُعبةٍ ما، هي استراتيجيةٌ عادلة، فإنّ اللاعِبين الذين يَعرفون ذلك يَعلمون أنّ نتيجةَ اللّعبة ستكون التعادل حَتمًا. وعندما تكون الاستراتيجيةُ المُثلى للُعبة ما هي استراتيجية غير عادلة، فإنّ اللاعِبين الذين يَعرفون ذلك يَعلَمون سَلفًا مَن سيكون الفائز ومَن سيكون الخاسِر، وفي كلتا هاتَين الحالتَين، تُصبِح اللّعبة تمرينًا معروفَ النتيجة بالنسبة للاّعِبين الذين يَعرفون الاستراتيجيةَ المُثلى. ولذلك يُمكِننا أنْ نتوصَّل إلى مقياسٍ جيد الدقَّة لقدرة أنواع المخلوقات على التفكير والمحاكَمة بمُلاحَظة الألعاب التي يُمارِسها الأفرادُ الكِبار الناضِجون منهم. بكلمة أخرى، يمكننا الافتراض أنه إذا كان الكِبار الناضِجون في نَوعٍ مِنَ الأنواع يلعبون لُعبة المربَّعات، فذلك يعني أنهم يَجدونها مسلّية وممتِعة، وهذا يعني أيضًا أنَهم لمْ يتوصَّلوا إلى إدراك ومعرفة الاستراتيجية المُثلى لهذه اللّعبة، وأنّ ممارَستهم لهذه اللّعبة يَضعُ مستواهم العقلي في مكانٍ أخفَض وأقلّ مِنْ نوعٍ آخَر يُدرِكُ أفرادُه أنّ لُعبة المربّعات مثلًا هي لعبة معروفة النتيجة، ويَعتبرونها لعبة مسلية للأطفالَ لا أكثَر.

إذا طَّبقنا هذا المقياس على النوع البشري، فإننا نلاحِظ فورًا أننا قد قطَعنا مرحلة لُعبة المربَّعات، لأنّ قدرة الكِبار الناضجين منّا على التفكير والمحاكَمة لا تُستَنفَر ولا تُستَثار في هذه اللّعبة، ولهذا فهي لُعبة دارِجة عادة بين الأطفال الذين لم يُدرِكوا بَعد استراتيجيتها المُثلى. ولعلنا نَصِل إلى حدود قدرتنا على التفكير والمحاكَمة في لعبة الضّامَة، إذ إنّ كثيرًا مِنَ اللاعِبين المحتَرفين قد توصَّلوا إلى إدراك الاستراتيجية المُثلى فيها، مما يجعلنا نَعتقد إمكانيةَ تصوُّر الاستراتيجية المُثلى الوحيدة التي تُوجَد في هذه اللعبة حَسب نظرية المباراة.

هناك لعبة أخرى ربما كانت أكثَر توضيحًا لِحدود قدرتنا على التفكير والمحاكَمة وهي الشطرنج. لُعبة الشطرنج هي أكثَر انتشارًا مِنْ لعبة الضَّامَة بين الكِبار الناضجين الأذكياء منا، وربما يدلّ هذا على أنها تُشكِّل تحدِّيًا أكبَر لتفكيرنا وعقولنا. يُعجَب الناسُ عادة بلاعِب الشطرنج الماهر المحترف أكثَر مِن إعجابهم بلاعِب الضَّامَة الحَذِق. ويُعامَل أبطال الشطرنج في روسيا معاملةَ الملوك، وعلى الرغم من أننا في أمريكا لا نقدِّم مِثل هذه المعامَلة والترحيب حتى لأفضَل لاعِبي الشطرنج عندنا، إلا أننا نَميلُ إلى الاعتقاد بأنهم عباقرة وأذكياء دون شك. وإنّ بوبي فيشر Bobby Fisher لهو مِثال على لاعِب الشطرنج الأمريكي الذي جَذبَتْ مَوهبتُه وغرابة طباعه شهرةً مذهِلة واهتمامًا جماهيريًّا مدهِشًا. والمِثال الآخَر الذي يدلّ على التَّحدي المثير الذي تَبعَثه فينا

لعبة الشطرنج هو وَضع برامج للكومبيوتر واستِخدامها في هذه اللّعبة. ولكن حتى بَعد استِخدام الكومبيوتر، وعلى الرغم من أننا قد توصَّلنا بمُساعدَته إلى بعض الاستراتيجيات الناجِحة في الشطرنج، إلا أننا لم نتمكَّن حتى الآن مِنَ التوصُّل إلى الاستراتيجية المُثلى في هذه اللّعبة.



[المترجم: لعبة الشطرنج وهي من ألعاب المباريات الصّفرية ذات الاطلاع الكامل].

لم تتمتَّع لُعبة الشطرنج بمِثل هذا التقدير العميق والاهتمام الجَاد في الفِكر الإنساني إلا لأنّ قدرتنا على التفكير والمحاكَمة لمْ تَتوصَّل بَعد إلى مَعرفة الاستراتيجية المُثلى في لُعبة الشطرنج. يمكِننا تصوّر أنّ لُعبة الشطرنج بالنسبة إلى نَوعٍ مُفكِّر أكثَر تَطوُّرًا مِنَّا لن تكون أكثَر مِنْ لعبة بسيطة غير مهمة، مثلما نَنظُر نحن إلى لعبة المربَّعات. وسَيعرف لاعبوهم سَلَفًا ما هي الحركات التي يجب عليهم القيام بها من بين عشرين تريليون تريليون تريليون تريليون تريليون حركَة بحيث يضمَنون النجاح (الذي قد يكون تَعادلًا أو فَوزًا مضمونًا لأحَد اللاعبين حَسبما إذا كانت الاستراتيجية المُثلى للعبة الشطرنج هي استراتيجية عادِلة أو غير عادِلة، وهذا أمرٌ ما زلنا نَجهله). لعلَّ الطريقة الوحيدة التي يمكِن أنْ يَتمتَّع بها مِثل هؤلاء اللاعبين الأكثَر ذكاء منَّا في لعب الشطرنج هو أنْ يتَّفقوا على عدَم اللَّعب وفقَ الاستراتيجية المُثلى.

نستطيع التوصُّل إلى تصوّر واضِح لِمكانِنا في مقياس القدرة على التفكير والمحاكَمة إذا تفحَّصنا بدقَّة ما هي الألعاب التي تُثير اهتمامنا؟ وما هي الألعاب التي لا تُشكّل أي تَحدٍّ يُذكَر لتفكيرنا وعقولنا؟ بالاستناد إلى الملاحظات القليلة المتوفرة، يُمكِننا التَّصور أنّ حدودَ قدرتِنا على التفكير والمحاكَمة كَنوعٍ بَشريٍّ يضَعنا في مكانٍ ما بين حدودِ الضَّامَة والشطرنج.

عندما تضَعنا نظريةُ المباراة في مكانٍ مُحدَّد كما ذكَرتُ سابقًا، يتَّضح لنا فورًا وجود حدود لقدراتنا العقلية والفكرية، وأنّ هذه الحدود يُمكِن قياسها وتَعيينها. نوجِّه هذه الملاحظَة بشكل خاص لأولئك الذين يُمجِّدون الجنسَ البشري ويُعظّمونَه فوق كل الأنواع الأخرى، ونُذَكِرهم أنّ معرفة مَكاننا بين الضَّامَة والشطرنج يُذَكِّرنا بأنّ القدرة على التفكير يمكن اكتِسابها وتطويرها على دَرجات، وأنّ أنواعًا أخرى أكثَر منّا ذكاءً قد تكون موجودة، مثلما وجِدتْ أنواع أخرى أقلّ منّا ذكاء وعقلانية.

تُذَكِّرنا نظريةَ المباراة التي مَنحَتْنا القدرةَ على قياس طاقاتنا العقلية بشيء آخَر عن أحوالنا: فنحن نَتميَّز بألعابِنا مثلما نَتميَّز بقدراتنا على التفكير والمحاكَمة، وإنّ افتِتاننا بالألعاب لا يدلُّ على مدَى قدرتنا على التفكير كما نظنّ، وإنما يدلُّ على قُصورنا عن التوصُّل إلى طاقاتٍ عقلية أكبَر، وذكاء أكثَر. فكلما ارتفَعتْ سوية الذكاء والتفكير لدَى النوع، انخفَضتْ دَرجة اهتمام أفرادِه بالألعاب، وإذا أدرَكنا وفَهِمنا هذه النتيجة التي توضحها نظريةُ المباراة عن صِفات النوع البشريّ لَحمدنا الله على أننا لم نَكن فِعلًا في قمَّة الذكاء.

نداء شَريعة الغاب: نظرية المباراة بين ثلاثة أشخاص

"يَكمن في أعماق كلّ منَّا ثائرٌ مُغامرٌ، وهو في صراع مستمر لصالحنا ضد الرجل المتحضّر الذي يَفرضه علينا المجتمع".

ويليام بوليثو William Bolitho في فترات الشِّدة الاقتصادية، تَظهَر أفضَل وأسوأ الصِّفات في البشر فتَراهم حُسَّادًا وكُرماء، مُتنافِسين ومُتعاوِنين، عمَليين ونظَريين، متوتّرين وهادِئين في الوقت نفسه. ولعلّ السبب في ذلك يَرجِع إلى أنّ الناس لا يستطيعون أنْ يُقرِّروا كيف يتصَرفون، لأنهم لا يَعرفون فيما إذا كانت مصالحهم البعيدة المدَى ستَتحقَّق بشَكل أفضَل إذا تَصَرفوا كأفراد أم إذا تَعاوَنوا كجَماعة؟

في نظرية المباراة، نظريةُ التَّنافس والصِّراع العَقلاني، يُعتبر الصِّراع بين فرديّة الإنسان ودَوره الاجتماعي قدَرًا مُحتَّمًا لا يُمكن تَجنّبه في العمل الجَماعي المشترَك. يَعتقد بعضُ الناس أحيانًا أنهم سيَتوصَّلون إلى نتائج أفضَل إذا تصَرفوا فَرديًّا بمَعزل عن الواجبات التي يَفرضها عليهم المجتمع. تُبيِّن نظريةُ المباراة حتميةَ وجود صراعات في أي عمل جَماعي مشترك، ولكنها تُبيِّن أيضًا أنّ الاحتمال الآخَر قد يكون أسوأ...

يَعتقد بعضُهم أنّ الإنسان حيوانٌ اجتماعي بِحُكمِ الضرورة، وبِحُكمِ طبيعته وفطرته، وأنّ فوائد التعاون وتَشكيل المجتمع تظهَر واضِحة حتى في الأحوال التي تشمَل شخصَين فقط. تَصوَّرْ مثلًا اللّعبة بين شخصَين والتي تسمّى "مشكلة السَّجين"، وفيها يُحاول النائب العام الحصول على اعترافٍ مِنْ أحَد رَجُلَين يشتبه باشتراكهما في جريمة قَتل. يُقدِّم النائب العام العَرض التالي: "الذي يُقدِّم مِنكما دليلًا للحكومة سيُطلق سراحه، في حين سيُحكَم على الآخر بالسجن عشرين سنة على الأقل. أما إذا اعترَفتُما معًا، فسيُحكَم على كلّ منكِما بالسجن خَمس سنوات، وإذا لمْ يَعترِف أيّ منكِما، فسيُحكَم على كلّ منكِما بالسجن سنة واحدة بتهمة مخفَّفة". وتَكمُنُ المشكلة في أنه إذا قرَّر كلّ مِنَ المتهَمَين في نفسه أنْ يَعترف بجريمته مُعتقدًا أنه سيحصَل على حُكمٍ بالسجن خَمس سنوات على أسوأ تقدير، وربما أُطلِق سَراحه على أفضَل تقدير، فسيُحكَم على كلّ منهما بالسجن خَمس سنوات بالتأكيد. هناك فائدة لتَجَنّب السلوك الفردي الأناني في مِثل هذا الموقف بالطبع، لأنه إذا اتَّفَقَ المُتَّهَمان على الثقة ببعضهما في عدم الاعتراف، فأسوأ حُكمٍ سَيترتَّب عليهما هو السجن سنة واحِدة فقط، ولكن في الوقت نفسه، يَحمِل اتِّفاقٌ كهذا في طَياته احتمالات الصِّراع والتأزم، فمثلًا يجب على كلّ مُتَّهم أنْ يأخُذُ بِعَينِ الاعتبار احتمال خيانة الآخَر، كما أنّ الاتفاق والتعاون قد لا يؤدّي إلى تَعقُّد المشكلة، بل إلى جَعلها مستحيلةَ الحَلّ أحيانًا.

هذه هي الحالة أيضًا في لُعبة تبدو بسيطة إذ يَشترِكُ فيها ثلاثة لاعِبين عليهم أنْ يتقاسَموا مبلغ ثلاثمئة دولار، ويُفترَض أنّ رأي الأغلبية سيكون نافِذًا في كلّ الأحوال والقرارات. إذا تَحقَّقَ الاتفاقُ والتعاون الكامل، فسيَحصَل كل لاعِب على 100 دولار. ولكن إذا أضَفنا إلى هؤلاء اللاعِبين مسحَةً واقعيةً مِنَ الأنانية والجَشع، للاحَظنا فَورًا أنّ اثنَين منهما يُمكِن أنْ يَتَّفِقا ضدّ الثالث، ويحصَل

كل منهما على 150 دولارًا. كما يُمكِن للثالث أنْ يحصَل على شيء من المال إذا استطاع إغراء أحَد المتآمرَين الآخرَين بتَحالف جديد يَعِدُه فيه بالحصول على حصّة أكبَر مِن المبلغ الكليّ. ولكن، حتى عندما يصِل هذا الاتفاق إلى قَرار مبدئيّ، فإنّ المتآمِر الذي أُزيح عن مكانه يستطيع العودة إلى اللّعب بِعَرضِ اتّفاقٍ جديد مع رفيقه في التآمُر الأول، وهكذا إلى ما لانهاية. عَدم إمكانية تَجنُّب مِثل هذا الصراع في الألعاب التي يَشترِكُ فيها ثلاثة لاعِبين أو أكثَر هو ما يَجعل هذه الألعاب مستحيلة الحلّ في الرياضيات. أي أنه إذا أُتيح المَجال لثلاثة لاعِبين أو أكثَر لكي يتَنافَسوا ويتَّفقوا بشكلٍ غير مُحدَّد أو مُقيَّد، فإننا نتوقَّع أنْ يكون مجتمعهم غير مستقرّ.

لا رَيب في أنّ الفيلسوف الإنكليزي توماس هوبز Thomas Hobbes يمكن أنْ يَتَّخِذ هذا الاستنتاج دليلًا على نظريته التي تقول إنّ البَشَر الذين يعيشون خارج المجتمع لا بدّ أنْ يتصَرفوا بطريقة فوضَوية. ربما لن يصِل اللاعبون الثلاثة الذين يتَنافَسون على قِسمة ثلاثمئة دولار إلى الفوضى الحقيقية الشاملة، ولكنه مِن الواضِح أنهم يريدون حَلًّا لمشكلتهم. آمَن الفيلسوف الإنكليزي جون لوك John Loche أيضًا بأنّ الوَضع الطبيعي الفطري للبَشَر هو حالَة الفوضى التي يَتصرَّف فيها كل فَردٍ على هواهُ بحريّة كاملة انطلاقًا مِن دوافِعه ورغباته الفردية، وفي كِتابه: الرسالة الثانية في الحكومة المدَنية Second Treatise of Civil Government كتبَ يقول: *"لكي يمكن تَجنُّب حالة الحرب هذه، يضَع الرجال أنفسهم في مجتمعات، ويتخلَّون عن حالتهم الطبيعية الفطرية الفوضوية"*، فالمجتمع له هدَفٌ معيّن وَضَعَهُ الإنسان، ولكي يتحقَّق هذا الهدف، يجب على الإنسان أنْ يُخضِع نفسه لِتَعهُّد والتزام مع كلّ إنسان آخَر في مجتَمعه، ويبدو أننا قد اتَّفقنا على مرّ التاريخ على تَركِ "الحالَة الفوضوية الطبيعية" دون أنْ نتَّفق تمامًا على كيفية تحقيق ذلك. وحَسب نظريةِ المباريات المشترَكة المتعدِّدة اللاعبين، فإنّ المجتمع المستقر هو ذلك المجتمع المُنْصِفْ الذي يسود العدل بين أفراده. ولكن العدل يُمكِن تفسيره بطرائق عديدة مختلفة، وحتى لو اتَّفقَتْ مجموعةٌ من الناس مثلًا على تحقيق العَدل في النواحي المالية، فسَيظلُّ الخِلاف قائمًا حول مَعنى العَدل والإنصاف، إذ سَيَنبري مَن يُسميّ نفسه اشتراكيًّا ويقوم بإلغاء المنافَسة، ويَطلب مِن كل مواطِن أنْ يوافِق على اقتسام الدَّخل العام بالتساوي مع الآخرين، في حين يَقومُ مَن يُسميّ نفسه رأسماليًا بالمحافظَة على المنافَسة، ولا يَطلُب سوى أنْ يلتَزم المواطنون بقوانين خاصة تضمَن العَدل والإنصاف بحيث تَتناسَب حصَّة كل مواطِن مِن الدَّخل العام مع الجُهد والاستثمار الذي بذلَه. ثم سيَظهَر أيضًا أولئك الذين يختلفون حول مَعنى العَدل والإنصاف في الحقوق المدَنية والإنسانية، فيَنهَض مثلًا أحَد أنصار الكاتِبة الأمريكية الروسية الأصل آين راند Ayn Rand ويَطلب أنْ يكون هَمُّ الحكومة وواجِبها الأساسي هو حماية حقوق الفَرد، بينما يقول أحَد أنصار الفيلسوف الإنكليزي جون ستيوارت مِيل John Stuart Mill أنّ واجِب الحكومة هو تحقيق الصالح العام...

بِغَضِّ النَّظَر عن الاختلافات الفلسفية، فإنّ الاختلافات الفردية وحدَها كافية لإعاقَة انصِهار مجموعة مِنَ البشر في مجتمع متماسِك، وحَسب نظرية المباراة، فإنّ استقرار أي تَحالف أو اتِّفاق يَعتمد أساسًا على الفوائد التي يقدِّمها المجتمعُ للأفراد المشتَرِكين فيه. ومِنَ المتَّفق عليه أنّ المَرء لَن

يَطلب الانضمام أو البقاء في تَحالفٍ ما إلا إذا كانت فائدة الانضمام إلى التَّحالف أكبر مِنْ الإمكانيات والفوائد التي قد يحصَل عليها إذا قامَ بالعمل وَحده، ومِنَ الواضِح أيضًا أنّ الإنسان الذي يَثِقُ بقُدرته على المنافَسة بِناءً على نجاحه في الحالة الطبيعية سَيميل إلى النظام الرأسمالي، بينما الإنسان الذي لا يَثِق بنفسِه، والذي يُراعي ويَحترم رغبات الآخرين، سَيميل أكثَر إلى النظام الاشتراكي. مِنَ الواضح أنّ كثيرًا مِنَ المجتمعات قد نَجحَت في التَكوُّن على الرغم مِنْ هذه العقبات، ولعلّ ما هو أكثَر إثارةً للإعجاب مِنْ تَكُّون المجتمعات الإنسانية هو استمرارها في البقاء، إذ إنه بَعد مَوت الأفراد المُؤسِّسين لِكيانٍ اجتماعي ما، قد لا يَحمِل أولادُهم وأحفادُهم ذات الوَلاء والانتماء للتَّحالف الاجتماعي، وربما رفَضوا الدفاع عن وجود ذلك المجتمع بالقوة والحماسَة نفسها التي حمَلَها آباؤهم وأجدادهم.

مِنَ الأسئلة التي لا تزال مَطروحَة في المجتمعات الرأسمالية، مِثل الولايات المتحدة الأمريكية، هو ذلك التساؤل عن دَرجة الحريّة التي يجب أنْ يُسمَح بها للفَرد المُستثمِرْ في الجهود التي يَبذلها في سبيل تجميع الثروة وزيادة دَخله الفرديّ قَبل أنْ تُلحقَ جهودُه هذه الضرر بالآخرين. إلى أي حَدّ يُمكِن أنْ يُسمَح للحريات الفردية بالامتداد والحركة قَبل أنْ تَجعل المجتمع في حالَة بدائية فوضوية تشبه اللاعِبين الثلاثة الذين يُحاولون اقتِسام الثلاثمئة دولار؟ اتَّخَذ الاقتصادي الاسكتلندي آدم سميث Adam Smith في كِتابه ثَروة الأمم Wealth of Nations مَوقفًا متشدِّدًا في تأييد سياسةِ تَركِ المَجال مفتوحًا بشكلٍ كامل أمام الحرية الفردية في المجتمع، لأنه كان يُؤمن أنّ ثروة المجتمع تَنمو وتَزدَهر بإعطاء كلّ فَرد مِن أفراده حريَّةً غير مقيَّدة في زيادة ثروته الخاصّة: *"عندما يُحاول كلُّ فَردٍ جاهِدًا أنْ يَستثمر رأسماله في صناعة مفيدة، فإنّ كل فَرد يَسعى بالضرورة إلى زيادة الدَّخل العام بأقصَى جُهد ممكِن في الوقت نفسه".*

تُعتبر فكرة آدم سميث هذه فكرة جَديرة بالملاحظة لأنها تَفترِض أنه كلما ازدادت حرية الأفراد، ازدادت خدمتهم للمجتمع، على الرغم من عدم قَصدهم لذلك، كما تَفترض أنّ المجتمعات التي تُقيّد الأفراد وتُطبّق عليهم القوانين التي تَفرِض "التعاون في سبيل صالح المجتمع" لا تَنمو ولا تزدَهر مثلما تزدَهر المجتمعات التي يُترك فيها للأفراد حريّة التعاون كما يَشاؤون وفقَ مصالحهم الفردية.

نَشر عالِم الرياضيات الأمريكي جون ناش[71] John Nash في سنة 1951 إضافةً هامّة إلى نظرية المباريات في رسالة تحت عنوان: الألعاب غير التعاونية. كانت نظريته الجديدة هذه وَسيلة جيدة لِدراسَة مَفهومِ الحرية الفردية في الرأسمالية، لأنها تَدرس المباريات المتعدِّدة اللاعِبين، والتي يَتحتَّم فيها على كلّ لاعِب أنْ يَسعى جاهِدًا لِزيادة ثروته الخاصّة إلى أقصَى حَدٍّ مُمكِن، ولا يَخضَع في علاقاته مع الآخرين إلا لقوانين قليلة مشترَكَة، ولا يَستطيع التفاهم والتواصُل مع الآخرين إلا من خلال تصرفاته وليس بالاتصال المباشر. وعلى الرغم من أنّ مُنطَلَقات ناش تَنسَجم مع نظرية آدم سميث، إلا أنّ نتائجه لا تؤيّد تمامًا تَنبؤات سميث وتوقُّعاته.

كان أول ما كَشَفَه ناش مِنْ نتائج تَكرار اللّعب في المباريات غير التعاونية، هو أنّ المُحصّلة النهائية تَتَّجِهُ عادةً إلى واحِد مِنْ تَوازنَين حَتميَّين هما: التوازن الأمْثَل، والتوازن الأقلّ مِثالية (التوازن الأسوأ)، وما يُحرّكُ اللَّعب نحو هذا التوازن أو ذاك هو أنّ اللاعِب يكون في أفضَل وَضع مُمكِن عندما يكون في أحَد هذَين التوازنَين فقط، بحيث يَتسلَّم جائزة، أو يَتجنَّب عقوبة. وعلى الرغم من أنّ أيّ مِن هذَين التوازنَين يُمَثِّل فائدةً للفَرد، إلا أنّ ناش قد وَجَد أنّ فائدةَ الجَماعة كَكلّ لا تَتحقَّق بأفضَل شَكلٍ مُمكِن إلا في حالة التوازن الأمَثَل فقط.

يُمكِن توضيح نتائج نظرية ناش في اللعبة غير التعاونية التي تُسمّى الرُّكود Stagnation التي يَملك كلّ لاعِب فيها حَقّ اختيار بَقائِه مع المجموعة أو انفصالِه عنها، أما قواعِد اللّعبة المَبنيّة على تمثيل نفسية المجموعة، فَتَنُصُّ على أنه إذا قرَّر أغلَب اللاعبين الانفصال، فسيُعطى لكل فَرد مِن أفراد هذه الأغلبية دولارًا واحِدًا، أما إذا قرَّرتْ أقليةُ اللاعبين الانفصال، فسَيُؤخذ مِن كل فَرد مِن أفراد هذه الأقلية عشرة سِنتات، في حين لا يُعاقَب أفرادُ الأغلبية الباقية، ولا يُعطَون أية جائزة في هذه الحالة. ويُمنع اللاعبون مِنَ القيام بأية اتصالات عَلَنية واضِحة قَبل قيام كل منهم باتِّخاذ قراره، إلا أنهم يستطيعون عادةً تقدير قرارات الآخَرين بَعد مُمارَسة اللعبة عدة مرات، ويُحاولون القيام بتَفاهُم غير مباشر مع بعضهم عن طريق تكرار تصرفات معيَّنة، وهكذا ففي مجتمع كبير، حيث يصعب الاتصال المباشر بين الأفراد عمليًّا، فإنّ نظرية ناش تبدو صحيحة بشكلٍ معقول.

يَحدث التوازن الأمثَل في هذه اللّعبة عندما يُقرِّر جميعُ اللاعِبين الانفصالَ ويَحصل كلٌّ منهم على دولار، في حين يَحدُث التوازن الأسوأ عندما يُقرّر اللاعبون عدم الانفصال ويَتجنَّبون بذلك التَّعرض لِعقوبة العَشرة سِنتات، ولكنهم لا يَحصلون على شيء. عندما تَصِل اللّعبة إلى أحَد هذَين التوازنَين لا تُوجَد فائدة لأيّ لاعِب مِن تغيير مَوقِفه، لأنّ ذلك سيؤدي حتمًا إلى الخسارة الشخصية. ويبدو أنّ سياسةَ إطلاق الحرية الفردية تُشجِّع اللاعِبين على اللّعب الجماعي، وبينما يُحاول كل لاعِب توقُّع حركات ومواقف الآخرين وهم يُحاولون زيادة ثرواتهم الخاصة، فقد يَقودُ هذه المجموعة كلها إلى نتيجةٍ سيئة غير مَرغوبة بالسهولة نفسها التي قد توصِلهم إلى أفضل نتيجة...!

مِن السهل جِدًّا ملاحظَة نماذج حيَّة مِن التوازن الأسوأ للعبة الرُّكود في كثير من المجتمعات المعاصِرة بأشكال مختلفة ومتنوّعة، فعندما يكون الاقتصاد راكِدًا ومريضًا، تَزيد البنوكُ المركَزية الحكومية الحالَة سوءًا بِرَفع مُعدَّل الفائدة الرّبوية على القروض بسبب خَوفها مِن الخسارة إذا خفَّضَتْ مُعدَّل الفائدة قَبل البنوك الأخرى. ونَرى أنّ مجموعةً مِنَ المسافرين الذين يَنتظرون دَورهم لِدخول الطائرة يهرعون إلى التَّدافع والتَّزاحم حالما يُشاهدون أحَد الأشخاص يُحاول التقدُّم أولًا إلى البوابة. وبشكلٍ أكثَر خطورة وجديَّة، نرى أنه في مجتمعٍ تَفَشَّتْ فيه الجريمة، يَتجنَّبُ المواطنُ المساعدةَ في مَنع جريمةٍ تَحدُثُ أمام عينيه خوفًا مِن التَّعرّضِ إلى الأذى... يتَّضح في كل هذه الأمثلة أنّ ردَّ الفِعل الفَردي حينما يتَصرَّف كل إنسان لنفسِه في مِثل هذه المواقف الجماعية إنما يزيد المشكلة سوءًا، ويؤدي إلى تَردّي المجتمع في هاويةِ التوازن السيء. من أجل إنقاذ المجتمع مِن مثل هذه الحالة السيئة، نحتاجُ عادة إلى فَرضِ عقوبة ما على كلّ فَرد يُقرِّرُ الاستمرار في البقاء مع الجماعة في هذه الحالة، أو ربما مِن الأفضَل مَنح جائزة لِكل فَرد يُقرّرُ الانفصال عن الجماعة في

تلك الحالة. إنّ كلّا مِن هاتَين الطريقتَين في الخَلاص تُحتِّم اللجوءَ إلى شكل من أشكال السلطة المركَزية التي تُنظِّم الجهود التطوعية أو الإجبارية التي تَكفل تَجنُّب التوازن السيئ أو التَّخلص منه. ففي المِثال الأول، يستطيع البنك الفيدرالي المركَزي في الولايات المتحدة الأمريكية مَثلًا أنْ يُحاول تَخفيض معدَّل الفائدة بأنْ يزيد السّيولة النقدية في المجتمع. وفي المِثال الثاني، تستطيع شركة الطيران حَلّ المشكلة بأنْ تَفرض على المسافرين أخذَ أرقامِ مقاعِدهم بالتسلسل حَسب ترتيب قدومِهم وتَنظيمهم في صَفٍّ مُرتَّب، وفي المِثال الأخير، يُمكِن سَنُّ قوانين تعاقِب الشَّاهد الذي يتَجاهل واجِباته الاجتماعية والإنسانية في مَنع الجريمة، أو بشكلٍ أكثَر واقعية، يُمكِن أنْ تُشَجِّع الحكومة المَحلية على تأسيس فرق مكافحة الجريمة مِن المواطنين في كلّ حَيٍّ مِن أحياء المدينة.

يجب على كل فَرد منّا إذا كان يَعيش في مجتمع تردَّى في هاويةِ التوازن السيئ أنْ يبدأ العمل على تشجيع مجتمعه لكي يتَغيَّر ويَتحرَّك باتجاه التوازن الأمثَل، ولو أدّى ذلك أحيانًا إلى الخسارة الفردية. إنّ الصمود أمام المِحَن الاقتصادية، أو تفشّي الجريمة، أو زيادة البَطالَة... وهي أزمات قد تؤدّي إلى انهيار المجتمعات... وكلها أمثِلة لِبعض الأوضاع التي يَعيشها الإنسان المعاصِر، ففي غَمرةِ مِثلِ هذه الأزمات، يواجِه كلٌّ منّا مسؤوليةَ الاختيار التي واجَهها أجدادُنا ذات يوم قَبل أنْ يقرِّروا الصُّمود معًا. وهكذا تُعيدُنا المباراة المتعدِّدة اللاعِبين التي نسمّيها: "المجتمع" إلى المباراة بين شخصَين التي تَدور في أعماقِ كلِّ فَرد منّا: الصراعُ القديم الأزَلي بين رَغبتنا في الانضمام إلى المجتمع، وبَين مَيلنا للانفصال عنه. واليوم، كما كان الحال بالأمس، ما زال الاختيار المصيري قائمًا بين إغراء الحياة معًا في مجتمع، وبين نِداء البقاء في فرديةٍ همَجية.

قوة الخيال:

الطوبولوجيا Topology

"ما هو الشكل؟ وما هو الوَجه؟

إن لم يكن سوى دليل الروح أو غلافها؟".

ناثانييل كوتن Nathaniel Cotton

من قصيدة: السعادة

نَتوقَّع أنّ تَقَدُّمَنا في العمر سيُغَيِّر شيئًا مِنْ قَسَماتنا، إلا أننا نَعتقد أيضًا أنه سيَترك سِماتنا الرئيسية دون تغيير. تَذكَّرتُ هذا الخاطِر في اجتماع مع أصدقاء قدامى على مَقاعد الدّراسة، تَخيلتُ أنهم أكبَر سنًّا، إلا أنني تَمكَّنتُ مِنْ تمييز كل منهم بتَصرفاته وشخصيته الخاصة، وبعد وقت قصير مِن وصولي، نسيتُ تمامًا تقدُّمهم في السِّن وكأن شيئًا لم يتغير، أو أنّ الزمن لم يمرَّ بنا.

وَجَدَ آخرون سعادةً مشابهة في اكتِشافهم وفي بَحثهم عن الجوانب الخالدة الثابتة في غَمرة التغيير المستمر: كالبوذيين في الأديان، والتَّكعيبيين في الرّسم، والطوبولوجيين في الرياضيات. وفي الحقيقة، إنّ مفهوم الثوابت الكامِنة في التَّحولات هو مفهومٌ أساسيٌّ في جوانب أخرى في الرياضيات، وهذا المفهوم هو لُبُّ نظرية المجموعات التي تَدرس التَّناظر.

في سنة 1870، استخدَم عالِم الرياضيات فيلكس كلاين[72] Felix klein مفهومَ الثابت الكامِن في المتحوّل لكي يُصنِّف الأنواع العديدة المعروفة من الهندسة بما فيها الطوبولوجيا. يُمكِن اعتبار الطوبولوجيا عِلمًا هندَسيًّا يَدْرُس في الأشياءِ صِفاتها الثابتة التي لا تتغير بالانحِناء والشدّ والالتواء، وهي الأحوال الثلاثة الخاصة في التَّحولات الطوبولوجية. فمثلًا، تُحافِظُ أي نقاط ثلاث تَقعُ على محيطِ طَوقٍ أو طارَة أو خاتم مَرِنْ على أوضاعها بالنسبة لِبعضها بعضًا مهما غَيَّرنا مِنْ شكل الطَّوق بالانحناء أو بالشَّد أو بالالتواء، فتظلُّ النقطةُ الوسطى في الوسَط، وتظلُّ النقطتان الأخرَيان كلًّا منهما في جِهة بالنسبة للنقطة الوسطَى. تُسمَّى هذه الخاصية: الثَّبات الطوبولوجي، لأنها لا تَتغير عندما تَخضَع للتَّحولات الطوبولوجية.

تُركِّز الطوبولوجيا على الصفات النوعية الثابتة للأشياء، وهي بذلك تُكمل الهندسة القياسية المعروفة التي تَدرس القياس الدقيق لِطول الأشياء وعَرضها وارتفاعها وزواياها... وهي الهندَسة التي دَرَسْناها جميعًا في المدارس، والتي طَورها المصريون منذ أكثر من 2500 سنة مَضتْ،

واستخدَموها في تقسيم الأراضي الزراعية. وفي الحقيقة، فإنّ كلمة الهندَسة نفسها تعني في أصلِها الإغريقي "قياس الأرض Geometry" كما ذَكرتُ سابقًا.

تُعتبر أبعادُ الأشياء أمرًا أساسيًّا في الهندسة القياسية، ولذلك يُنظَر فيها إلى تَوَسُّع دائرة مثلًا على أنه تغيير جوهريّ، في حين يُعتبر هذا الأمر ثابتًا في الطوبولوجيا التي تَدرُس الثوابت الكامِنة في التَّحولات الظاهرية. وبينما تُركِّز الهندسة القياسية انتباهَنا على الزيادة الحاصِلة في محيط الدائرة، تَتجاهَل الطوبولوجيا هذا التَّغيُّر الظاهري في محيط الدائرة، وتُركِّز انتباهَنا على أنه رغم اتِّساع الدائرة، فإنها تَظلُّ مِنْ حيث الشَّكل دائرة. ويُمكِنُنا القول إنّ الهندسة القياسية تَدرس الجوانب المؤقّتة المتغيّرة في الأشكال الهندسية، بينما تَدرس الطوبولوجيا الصفات الثابتة أو جَوهَر هذه الأشكال. وجَوهَر الشَّكل هو مجموعة الصفات الثابتة طوبولوجيًّا خلال التَّحولات الظاهرية، لأنّ هذه الصِفّات الثابتة تُمثِّل جَوهَر الشَّكل أكثَر مِن أيّ شيء آخَر. فمَثلًا، ما هي الدائرة؟ أليست سَطحًا مُنحَنيًا مُغلَقًا له داخِل وخارج؟ وما هي الحَلقة؟ أليست سَطحًا مُنحَنيًا مُغلَقًا في داخِلِهِ ثُقب؟ تَدرس الطوبولوجيا الجوانبَ الأساسية الجوهرية للأشكال على الرغم من تَغَيّر كل صفاتها الأخرى. ومن هذا المنطلق لا يُمكن أنْ تكون الهندسة عِلمًا تامًّا بدون الطوبولوجيا، مثلما لا يُمكِن أنْ تكون الفلسفةُ تامّة إذا لم تَبحَث فيما وراء الطبيعة.

منذ أنْ أَسَّسَ عالِم الرياضيات السويسري ليونهارد أويلر Leonhard Euler عِلم الطوبولوجيا سنة 1736، تعلَّم الطوبولوجيون أشياء كثيرة عن مُكّونات جَوهَر الأشكال الهندسية وعلاقاتها ببعضها بعضًا، فتَعلَّموا مَثَلًا أنّ لِكل شيء جَوهرًا خاصًّا به (أي أنّ لِكل شيء عددًا من الصفات الثابتة طوبولوجيًّا)، وأنّ الطريقة الوحيدة لإدراك التَّماثُل بين شيئَين مختلفَين ظاهريًّا تَكمُنُ في إدراك التَّماثل بين جَوهَريهِما. ولعل أهم النتائج التي تَوصَّلوا إليها هي الثوابت الطوبولوجية، إذ إنه بمَعرفة هذه الثوابت، يَتمكَّن الطوبولوجي مِنْ إدراك الصفات الجوهرية للأشياء.

يُحدِّد الطوبولوجيون الثوابتَ الأساسية الثلاثة على أنها: أبعادُ الشيء، وعدَد حَوافِّه، وعدد جَوانبه. لأنّ كلًّا مِنْ هذه الصفات للأشياء تظلُّ ثابتة مهما تعرَّض الشيء للانحناء أو للشَّد أو للالتواء. فمَثلًا إنّ صفحةً مثالية مِن الورَق هي شَكلٌ له بُعدَين (الصفحة المثالية هندسيًّا هي صفحةٌ لا سَماكَة لها) وله حافَّة واحِدة وجانبَين. هذه المجموعة مِنَ الصفات الثابتة هي جوهر هذا الشَّكل (الصفحة)، لأنكَ مهما غَيَّرتَ مِنَ الشكل الظاهري لهذه الصفحة، فستظلُّ شَكَلًا له بُعدان وحافّة واحدة وجانِبان. ويَنطَبق هذا أيضًا على السَّطح المثالي لكُرة السلَّة، فهي شَكلٌ له بُعدان وليس له أية حافَّة وله جانبان. وسَطحُ الأسطوانة المثالي هو شَكلٌ له بُعدان وحافَّتان وجانبان... وهكذا بالنسبة لكل الأشياء.

مِنَ الناحية الطوبولوجية، تسمى الأشياء التي تَتصِف بجَواهر من ذات النوع الواحِد بالأشياء المُتماثلة شكلًا Homeomorphs وهي الأشياء التي تَتمتَّع بثوابت طوبولوجية مُتماثِلة، فمَثلًا، تُعتبر كُرة السَّلَّة الفارِغة مِنَ الهواء (رغم تَغيّر شكلها) شَكلًا مُماثلًا لِكُرة السَّلَّة المَملوءة بالهواء، لأنّ صفاتها الجوهرية الثابتة طوبولوجيًّا مُتماثِلة. وفي الحقيقة، جميع الأشكال الظاهرية التي تأخُذها كُرة السَّلَّة عند انحِنائها أو شدّها أو التوائها هي أشكال مُتماثِلَة طوبولوجيًّا.

يدلُّ مفهوم الأشكال المتماثلة على أنّ نظرةَ الطوبولوجي إلى الهندسة تُشبه نظرةَ بعض الرَّسامين إلى الحقيقة الواقعية، فعندما يَنظر بعض الرسامين إلى شيءٍ ما، فَهُم يميلون إلى رؤية كل الزوايا المُمكِنة التي تُصَّوِر هذا الشيء، ويستطيعون في الوقت نفسه أنْ يُصَوّروا لنا جَوهَره الأساسي، ويبدو أنّ الرسام مونيه Monet مثلًا قد فَعلَ هذا عندما نظَر إلى كاتدرائية روان Rouen في باريس قَبل أنْ يَرسمها في أوقات مختلفة مِنَ اليوم في لوحَةٍ واحدة. وبشكلٍ مُشابهٍ، عندما يَنظر الطوبولوجيون إلى شيء ما، فإنهم يَرون فيه كل الأشكال المتماثلة التي يُمكِن أنْ يتَّخذها مع المحافظَة على جوهره الأساسي لِيبقى الشيء ذاته.

يفيدُ مفهوم الأشياء المُتماثلة طوبولوجيًّا في توحيد النظرة إلى الأشياء في الهندسة، كما يفيد في تَصنيفِها، فمَثلًا تُشَكِّل مجموعة الأشياء المماثلة لِكُرة السَّلَّة فِئةً مِنَ جَواهر الأشكال التي تَضمُّ كل الأشياء ذات البُعدَين والجانبَين والتي ليس لها حافّة. وتُشَكِّل هذه الفئة والفئات الطوبولوجية الأخرى حدودًا صارمة، إذ يَستحيل على أي شيء أنْ يَنتقِل مِنْ فئةٍ طوبولوجية إلى أية فئةٍ أخرى. وتَرجَع هذه الاستِحالة إلى كَون الصفات الطوبولوجية الثابتة لِشيء ما لا يُمكِن أنْ تتغير بالانحِناء أو بالشدّ أو بالالتواء إلى الصفات الطوبولوجية الثابتة لِشيء آخَر. ولذا، فالفئاتُ الطوبولوجية هي فئاتٌ صارِمةُ الحُدود، أو بكلمة أخرى، يُصنَّف الشيء في فئةٍ طوبولوجية بحسب طبيعة جوهره التي لا تَتغيّر عند إخضاعها للتَّحولات الطوبولوجية. ولكن يجب أنْ نُلاحِظ هنا أنّ جَوهر الأشياء يُمكن تغييره بإخضاعِها إلى تحوّلات غير طوبولوجية، فمثلًا، يمكِننا باستِخدام الصَّمغ والمقصّ أنْ نُحقِّقَ ما لا يُمكِن تحقيقه بالانحِناء والشدّ والالتواء، لأنّ ذلك يُمكِّننا مِنْ تغيير الصفات الطوبولوجية الثابتة لِشيء ما إلى شيءٍ آخَر غير مماثل لها مِنْ فئةٍ طوبولوجية أخرى. فإذا لَصَقْنا طَرَفَيّ صفحةٍ مِنَ الورق، تُصبح أسطوانة، وهكذا بقليلٍ مِنَ الصَّمغ نستطيع تغيير جِسم له بُعدان وحافّة واحِدة وجانِبان (ورقة) إلى جِسم له بُعدان وحافّتان وجانبان (أسطوانة).

إذا قُمنا بعملية التواء لأحَد طرَفَيّ صفحة الورق، ثم لَصَقنا طَرفَيها، نَحصل على شَكلٍ أكثَر غرابَة، هو شكلٌ له بُعدان وحافّة واحِدة وجانب واحِد، وهذا الشَّكل يُسمّى: شَريط

موبيوس Mobius Strip، وهو شَكلٌ غريب لأنّ له جانب واحِد في حين أنّ أغلب الأشكال التي نتَصوَّرها لها جانبان، ولأنّ شريط موبيوس[73] ذو جانب واحِد، يُمكِن تَلوينه كاملًا دون أنْ يحتاج الرَّسام إلى عبور أية حافّة، وله صِفات شاذّة أخرى ذُكِر بعضها في هذه القصيدة الفكاهية:

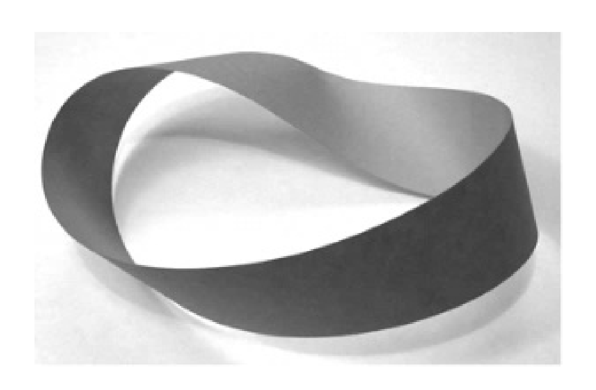
يَعتقد عالِمُ الرياضيات

أنّ شريط موبيوس له جانب واحِد

وستَضحَك كثيرًا

إذا قَصَصته في المنتصف،

لأنه سيظلّ قطعةً واحدة عندما يُقَصّ...!



[المترجم: شريط موبيوس]

وبشكل عام، فإنّ النتائج الطوبولوجية، مِثل هذا المثال السابق، تُصوّرُ حقائقَ هندسية معقَّدة، ولكنها مُنَظَّمة، وعناصرها مُترابطة بشكل عَقلاني ومنطقي، كما هو الحال في العناصر الحقيقية في عالَم الواقع. وكما رأينا، فإنّ الطوبولوجيين قد تَعلَّموا أنّ الأشياء تُشبه الكائنات الحيّة بأنّ لها ذاتيّة وصِفات مميّزة ثابتة ومستقلة عن الظروف الخارجية التي تُحيط بها، وأنّ هذه الذاتية المتميّزة الثابتة لا يُمكِن تحطيمها وتَغييرها على الرغم من تَغيّر المظاهر السَّطحية في الشكل الخارجي للأشياء. وهكذا، بالاستِناد إلى هذا الاكتشاف الفريد، فإنّ كل المعلومات الطوبولوجية إنما تدلُّ على وجود نظامٍ مفهوم وراء ذلك التَّنوع الفوضوي الظاهري في عالَم الأشكال الهندسية.

هذا ما اكتشَفَه العِلم في العالَم الفيزيائي مع فارقٍ واحد مهمّ: بينما يظلُّ العِلم في خِلاف وتَناقض مع أغلب الأديان حول التفسير الصحيح للنظام الواضِح في الكَون، فإنه لا يوجَد أي تساؤل أو شك في أنّ النظام الواضِح في الحقائق الهندسية إنما هو نظامٌ وُضِعَ عن قَصد وتَدبير. وفي هذه الحالة، فالسؤال الوحيد المتبقي هو فيما إذا كان هذا النظام والتدبير مِنْ صُنعنا نحن، أم أنه قد أوحِي إلينا اكتِشافه من خلال دراسَتِنا للطوبولوجيا؟ وعلى كل حال، فإنّ دراسة الطوبولوجيا تُساعدنا على فَهم الحقائق الهندسية والحقائق الإنسانية، وذلك لأنّ الطوبولوجيين قد سبَقوا الآخرين في فَهم جَوهر الأشياء، إذ يستطيع الطوبولوجيون أنْ يُخبرونا بدقّة ما تَعنيه صفحة الورق، أو كُرة السَّلَّة، ولكننا أقلّ فَهمًا لما يعنيه الإنسان بِدليل اختلاف آرائنا حوله.

ما هي الذات الإنسانية؟ وما هي تلك الصفات الفردية الخاصة التي تستمر بالوجود على الرغم من التقدم في العمر؟ وما هي تلك الصفات الإنسانية العامة التي تستمر بالوجود على مرّ ملايين السِّنين من الحياة والتَّغير والتَّطور؟ هذا إذا كان النوع البشري يَتغيَّر ويتَطور فِعلًا؟! هذه المسائل ليست قضايا دينية بَحتة، بل هي مسائل تَهّم المؤمن وغير المؤمن على السواء. وتَتعلَّق هذه المسائل التي لم تُحلّ بَعد بأسئلة أكبَر تدور حول وَضعنا الخاص المتميّز، وعن دَورنا ومَكاننا في النظام العام للكَون والأشياء. كما تَتعلَّق بالأسئلة الأبسَط التي تَدور حول كيفية تَعرُّفِنا على أصدقائنا القدامى في حفلات اجتماع الشَّمل دون أنْ نضطر إلى قراءة أسمائهم.

يبدو أنّ الشخصية وطريقة التَّصرف هي صِفات لا تتغيَّر كثيرًا على مرِّ العمر، وهي تشبه في ذلك الثوابت الطوبولوجية. ولكنني أحاول تَصوُّر ما هي الصفات التي ستُمَكِّنني من تمييز

الإنسان عن الحيوان في حفلةِ اجتماعِ شَملٍ قد تُعقَد بعد عدة آلاف الملايين من السّنين، وهي فترةٌ كافية لإحداث بعض التغيرات الشَّكلية الكبيرة إذا كان داروين على حَقّ؟!

نَعتمدُ هذه الأيام على مقارَنة الشكل الفيزيائي للتمييز بين أنواع الحيوانات، وقد أصبح علماء التصنيف خُبراء حاذِقين في تصنيف الأنواع الحيوانية بالاعتماد على ملاحظاتٍ مِثل نسبة وَزن الدماغ إلى وَزن الجسم، وتَركيب الهيكل العظمي، وطريقة الحركة، وعدَد الأصابع... وهكذا. ولكننا لم نُدرك بَعد كيف نُميّز بين الأنواع بالاعتماد على صِفاتٍ خفيّة أقلّ وضوحًا، مِثل العواطف والانفعالات وطريقة التفكير، ربما لأن عواطِف نَوعٍ حيواني ما بالنسبة لِعالِمِ التصنيف هذه الأيام تشبه في غموضها عدَد حوافّ الأشياء بالنسبة إلى عالِم الهندسة القياسية.

أتوقَّع أنني في حفلَةِ اجتماعِ الشَّملِ المُفترضَة التي قد تُعقَد بَعد ملايين السِّنين، فإنني لن أتمكَّن مِنْ التعرف على نَسلِ أجدادي مِنَ البشر إلا بالاعتماد على تلك الصفات الخفيّة، والحقيقة فإنّ حَدسي الطوبولوجي يوحِي لي بأنّ صِفاتنا العقلية هي الثوابت التَّطورية الهامة، وليست صِفاتنا الجسدية... إنّ صِفاتنا العقلية هي التي تَدلُّنا على مَعنى كَونِنا بَشَرًا، وهي الصفات التي ستستمر في البقاء على الرغم من التطور والتغيّر على مرّ العصور.

وجوه التَّغيُّر المألوفة: نظرية الكارثة Catastrophe Theory "ليس العالَم فوضى من الحطام والهَشيم

ولكن العالَم منسَجم في اضطرابه

حيث نرى النظام في التنوع

وحيث تتَّفق كلّ الأشياء رغم اختلافها".

أَلِكسندر بوب Alexander Pope لعل الحقيقة الوحيدة المؤكَّدة في هذا الكَون كما يُقال هي التَّغيُّر. كل شيء عَرفناه في العِلم يدلُّ على ذلك، وكل شيء في الكَون، بل والكَون نفسه في حالة تغيّر مستمر، والأشياء التي تبدو ثابتة مستقرة كالجبال والهواء والشمس تَخضَع هي أيضًا في الحقيقة للتغيّر المستمر، فهي دائمًا في حالة تَوازن ديناميكي حتى خلايا أجسامنا تُستبدَل كلها بخلايا جديدة كل سَبع سنوات تقريبًا.

مَوقِفُنا من التغيّر، وخاصّة التغيّر المفاجئ، قد تَغَيَّر أيضًا في العقود الأخيرة. في الماضي البعيد كانت التغيرات المفاجئة، مِثل الموت الطَّارئ والكوارث الطبيعية، تُفَسَّر عادةً على أنها مِن فِعل عامِلٍ غامِض مُبهَم كَنَزوَةِ آلهةٍ، أو قوة عفريتٍ مِن الجِنّ أو شيطان، كانت أَوْجُهُ التغيّر المفاجئ وأنماطُه غامضة مُبهَمة بالنسبة لنا، وكانت تُشَكّل نوعًا مِن الخطر الغامض المجهول. في القَرن السابع عشر، خلال عصر التنوير والصحوة الأوروبية، أدركَ إسحاق نيوتن أنّ أنماطًا كثيرة من التغيّر التدريجي، كَزيادة عَدد السكان مَثلًا، تَتبَع نظامًا ثابتًا يُمكِن التَّنبؤ به بتطبيق معادلات رياضية قليلة. ولكن حتى في ذلك الوقت، ولِسنين عديدة بَعده، لمْ يَكُن مِن المُمكن تطبيق أي فَهم أو تَحديد معقول للتغيُّر المفاجئ في الرياضيات.

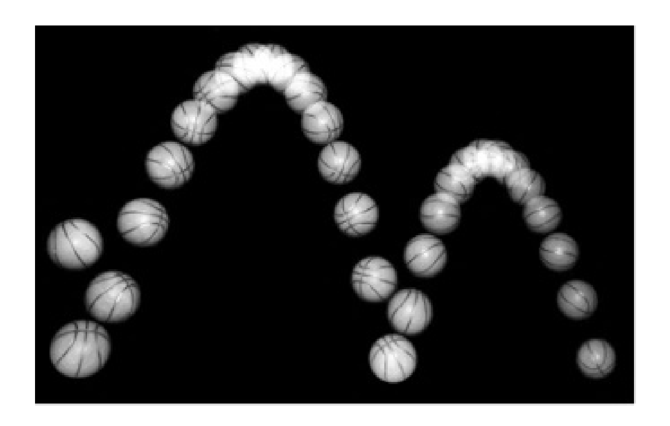
في عام 1958، تَمَكَّن عالِم الرياضيات الفرنسي رينيه توم[74] René Thom من تحديد التَّغير المفاجئ بنجاح، إذ اكتشَفَ أنّ أغلب التَّغيرات المفاجئة، أو الكوارث كما سَمّاها هذا العالِم، تَخضَع لأنماط منتظَمة يُمكِن وَصفها نوعيًّا بسَبع معادلات رياضية...! وعلى الرغم من أنّ نظريته لا تُساعدنا على مَعرفة سَبب التغيّر المفاجئ أو الكارثة، إلا أنها توضح أنّ هذه التَّغيرات ليست عشوائية وفوضوية كما كان يُعتقَد سابقًا، كما بَيَّنتْ أيضًا أنّ التَّغيرات المفاجئة التي تُصيبنا شخصيًّا، كالانهيار العصبي وهجمات النرفزة والغضب، هي من نوعيةٍ مشابهةٍ لتلك التغيرات المفاجئة التي تَحدث في الكَون البعيد...! وهكذا تُمَكّننا نظريةُ توم مِنْ إدراك أَوْجُه التغيرات المفاجئة والكوارث التي تُغيِّر العالَم الطبيعي حولنا كما لم نُدركها مِن قَبل.

في عالَمٍ ديناميكي كعالَمنا، يتَحتّم على علماء الرياضيات أنْ يَستخدِموا وسائل الرياضيات في دراسة التغيُّر، وقد كان هذا الدَّافع العلمي للتوصُّل إلى تفسيرٍ وفَهم كَمِّيّ للتغيُّر هو الدَّافع الذي

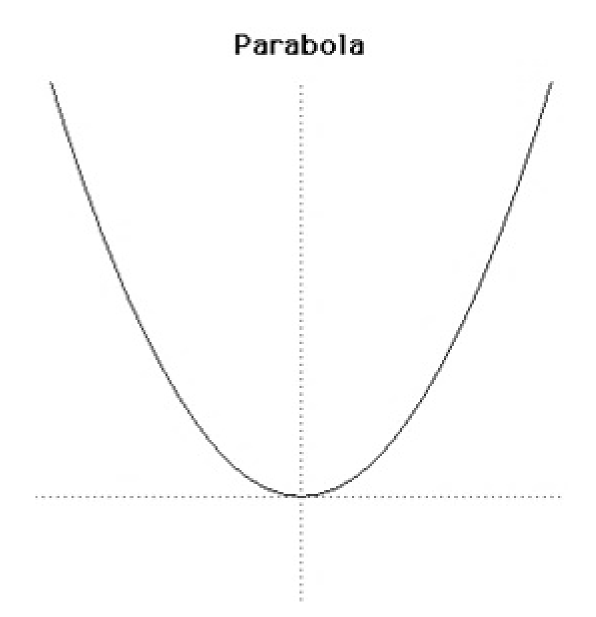
حَرَّضَ إسحاق نيوتن على اكتشاف حِساب التفاضل والتكامل، فقد وَضَع نيوتن حساب التفاضل والتكامل لكي يَصِفَ التَّغيُّر الذي يَتَطور بخطوات صغيرة متتالية، أي التَّغيُّر التدريجي المستمر. وقد استخدَم العلماءُ أساليب نيوتن في حساب أشياء مِثل حركة الكواكب حول الشمس، أو زيادة عدد السكان، أو تَسارع الأجسام في حالة السقوط... واكتَشفوا آنذاك باستِخدام حساب التفاضل والتكامل أنّ ظواهر التَّغيُّر التدريجي المستمر التي تبدو مختلفة ومُتَبايِنَة هي في الحقيقة متشابِهة مِن وجهَةِ نَظَر الرياضيات، فمَثلًا لوحظ أن معادلة النموّ الأُسّي في حساب التفاضل والتكامل التي تَصِفُ زيادة المدَّخرات في حسابِ التوفير، تُماثِلُ تمامًا المعادلة الأُسّية التي تَصِفُ نمو الجراثيم في مزرعةٍ مخبرية، كما تُماثِلُ المعادلةَ الأُسّية التي تَصِفُ الزيادةَ في التفاعل النووي المتسلسل، والمعادلةَ التي تَصِفُ الزيادة الطبيعية في مجموعةٍ من الحيوانات.

لعل مِنْ أهم نتائج حساب التفاضل والتكامل هو القدرة على معرفة احتمالات حركَة جِسم يتحرَّك بحرّية في الفراغ تحت تأثير الجاذبية. وفْقَ حساب التفاضل والتكامل، يَخضَع هذا الجِسم لواحِد مِنْ ثلاثة مَسارات نموذجية حَسب سرعة انطلاقه مهما كان شَكل هذا الجِسم أو كتلته أو كثافته أو تركيبه الكيميائي. وهكذا يَسير جِسمان مختلفان في الشَّكل وفقَ مَسَارٍ واحِد (في الفراغ) إذا كانت سرعة انطلاقهما في البدء متساوية.

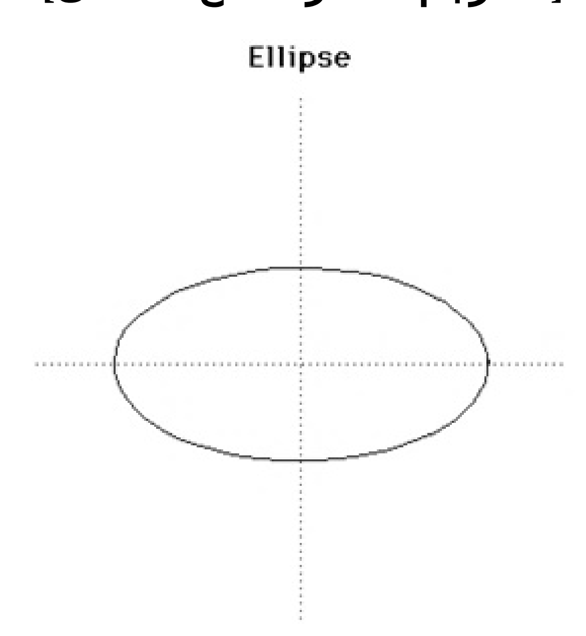
إذا انطلقَ جِسم بسرعة ابتدائية أقلّ مِنَ السرعة المَدارية (التي تبلغ بالنسبة إلى قوة الجاذبية الأرضية 17000 مِيل في الساعة) فسَيكون مَسَارُه حَتمًا بشكلِ قَطْعٍ مُكافِئ Parabola، وهذا هو المَسَار المنحني الذي يَتبعه السَّهم أو الرصاصة أو الحَجر بعد الرّمي. وإذا أُطلِق جِسمٌ بسرعةٍ تتراوح بين السرعة المَدارية وسرعة الانفِلات من الجاذبية الأرضية (التي تبلغ بالنسبة إلى قوة جاذبية الأرض 25000 مِيل في الساعة) فسَيكون مَسَاره حتمًا بِشكلِ قَطْعٍ ناقِص Ellipse أو دائرة، وهذا هو المَسَار الذي تَتبعه الكواكِب في دَورانها حول الشمس، وهو يماثل أيضًا المسار الذي تَتبعه الأقمارُ الصناعية حول الأرض. وأخيرًا، إذا أُطلِق جِسم بسرعة تساوي أو تزيد على سرعة الانفِلات، فسيكون مَسَاره حَتمًا بشكل قَطْعٍ زائدٍ Hyperbola، وهذا يشبه القَطْع المكافِئ إنما بانحِناء أكبر، وهو المَسَار الذي اتَّخذَتْه مَركَبة الفضاء الأمريكية أبولو في طريقها إلى القمر. اكتِشافُ هذه المَسارات يُماثِلُ في جُرأتِه وثوريَّته اكتِشافَ توم في وَصف التَّغير المفاجئ.



[المترجم: مَسار القَطع المُكافئ كما يظهَر في تصوير حركة الكُرة]

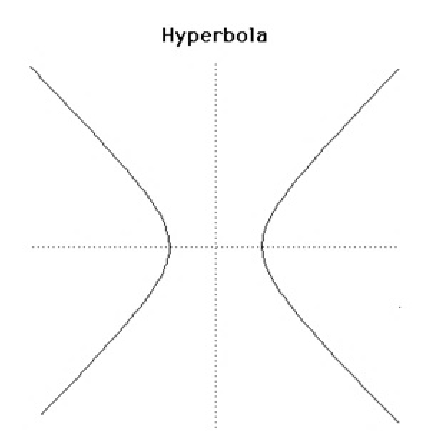


[المترجم: مَسار القَطع المُكافئ]



[المترجم: شكل توضيحي لمَسار بشكل القَطع الناقص الذي يشبه مَدارات الكواكب

حول الشمس]



[المترجم: مَسار القَطع الزائد]

على الرغم من الفوائد العظيمة والخَدمات الجُلَّى التي قَدَّمَها حِساب التفاضل والتكامل للعِلم، إلا أنه لم يُقَدم للعلماء طريقة تُمكِنهم مِن وَصف وتَحديد التغيّر المفاجئ. أعاقَ عدم وجود مِثل هذه الأساليب والعمليات الرياضية لِدراسة التغيرات المفاجئة علماءَ الأحياء في دراسَتهم النظرية لانقسام الخلية (وهي مِن أهم المظاهر الأساسية في عِلم الأحياء) لأنّ الخلايا تنقَسم بشكل مفاجئ وليس بشكل تدريجي. ويبدو أنّ توم كان عارِفًا بوجود هذه المشكلة في عِلم الأحياء، بل يبدو أنّ إدراكه لهذه المشكلة كان أحَد الدَّوافِع التي شَجَّعته على تطوير نظريته في التغيّر المفاجئ. وقد نُشِرتْ أولى تَطبيقاتِه لهذه النظرية سنة 1968 في سلسلةٍ مِنَ الكُتب تحت عنوان: "نحو عِلم الأحياء النظري Toward a Theoretical Biology".

تُكمل نظريةُ الكارثة حِسابَ التفاضل والتكامل في الرياضيات والعلوم، إذ إنّ حِساب التفاضل والتكامل يُمَثِّل نظريةً كمّيةً في دراسة التغير التدريجي المستمر، بينما تُمثِّل نظريةُ الكارثة دراسةً نوعية للتغيّر المفاجئ. وتبدو نظريةُ الكارثة واضِحةَ الإتقان والإحكام بشكلٍ خاص في الطوبولوجيا. لعل أوضَحُ جوانب تطبيق نظرية توم عن التغيّر المفاجئ في الطوبولوجيا هو مَفهوم التَّماثُل الطوبولوجي: يُعتَبر جِسمان متماثِلان طوبولوجيًّا إذا اشتَرَكا بصفاتٍ جوهرية خاصّة ولو كانا مُختَلفَين في صِفات أخرى. فمثلًا، يُعتبَر فنجانُ القهوة والطّوق متماثلَين طوبولوجيًّا لأنّ كلًّا منهما لَه ثُقبٌ في وسَطَه، وهذا الثّقب هو صِفة جوهرية أساسية خاصّة، بحيث إننا لو استطعنا تحويل فنجان القهوة إلى طَوق، لَتغيَّرت كل صِفاته الأخرى ما عَدا وجود الثقب في وَسَطه. وهكذا يَتحدَّد التَّماثل الطوبولوجي بوجود صِفات نوعية وليست كَمّية (مِثل مساحة الطّوق، أو عمق الفنجان)، ولهذا السبب، قد تكون الأشياء المختلفة ظاهريًّا متماثِلَة طوبولوجيًّا.

بَدأ العالِم توم في بَحث نظرية الكارثة بطريقة مماثلة، بأن يَبحث عن التشابه النوعي بين الكوارث والتغيرات المفاجئة التي تبدو مختلفة في الظاهر، كالاختلاف بين الطّوق والفنجان. ولذلك، بَحثَ عن صِفةٍ تشبه الثّقب في كَونِه صَفَةٌ جوهرية أساسية ثابتة ترتبط بالكارثة بشكلٍ نوعيّ بحيث يَتمكَّن مِنْ استِخدام هذه الصّفة في الرياضيات لِوَصف وتصنيف الكوارث والتغيرات المفاجِئة، وقد اكتَشف أنّ مِثل هذه الصِّفة تَكمُن في عدد العوامل التي تسيطر على حدوث الكارثة. وعَرَّفَ توم العامِل المُسيطِر بأنه أي عامِل يُمكِن أنْ يؤثِّر في تَطوّرِ التَّغَيُّر وَفي جِهَةِ حدوثِه تحت أي ظرف أو

حالَة تؤدي لهذا التغيير المفاجئ، فمَثلًا: العامِل الأساسي الذي يَتحكّم ويُسيطر على انتفاخ البالون (وبالتالي على احتمال انفجار البالون) هو ضَغط الهواء، لأنه بزيادةِ أو بتَخفيضِ هذا العامِل المُسيطر يتأثّر تطوّر وَجِهَةُ حدوث التغير في حالة البالون.

كان هذا الاكتشاف الوحيد، وهو أنّ عدد العوامل المسيطرة هو صِفة جوهرية مِنْ صفات الكارثة، مَثل صِفة وجودِ الثّقب في الطَّوق والفنجان، هو الأساس الذي استَند إليه توم في تعريف التماثل بين الكوارث وحَسب هذا التعريف تُعتبرُ الكوارث تَغيرات مفاجئة متماثلة إذا كان سلوك كل منها يتحدَّد بعَدد متماثِل ومُتساوٍ مِن العوامل المُسيطِرة، وهكذا فإنّ انفجارَ البالون مَثلًا يُعتبر كارثة أو تَغيّرًا مفاجئًا مُماثلًا ومكافئًا لأية كارثة أخرى، أو لأي تَغيّر مفاجئ آخر يتحدّد سلوكه بعامِل مُسيطِر واحد مهما كان نوعه. وهكذا قام توم بتَصنيف الكوارث إلى فئات حَسبَ عدد العوامل التي تُسيطر عليها. يُعتبر هذا التعريف أساسيًّا في نظرية الكارثة، وهو يعني أنه إذا كان عدد العوامل المُسيطرة على سلوك ظاهرتَين متساويًا، فستَتبَع هاتان الظاهرتان نمَطًا متماثِلًا في التغيّر من حيث نوعيّته حتى ولو لم تَكُن هاتان الظاهِرتان مُتساويتَين من حيث الكمّ، أو في صِفاتهما الأخرى. وبتطبيق هذا التعريف، استطاع توم تحديد الفئات المتشابهة نوعيًّا في الكوارث التي تبدو مختلفة ظاهريًّا.

يُمكِن اعتبار أنّ اكتشاف توم أنّ الصفة الجوهرية الأساسية للكارثة هي عَدد العوامل التي تُسيطر عليها وتَتحكَّم في حدوثِها هو اكتشافٌ مشابه لاكتشاف نيوتن أنّ الصفة الأساسية التي تُحدّد مَسَار جسم تحت تأثير الجاذبية هي سرعَة انطلاقِه في البداية، ففي كلٍّ من هاتَين الحالتَين ليس هنالك أي تأثير رياضي هام لأي عامل آخَر في سلوك الحالَة المتغيّرة، وفي نتيجتها، سوى العامل المُسيطِر أو الصفة الأساسية، وما تلك العوامل والصفات الأخرى سوى أقنِعة تخفي وراءها وجوهَ التغيّر المتشابهة أصلًا. لا شك بأنّ هنالك بعض الاختلافات بين اكتشاف توم واكتشاف نيوتن، فبينما لا توجَد سوى فئات ثلاث تضمُّ كافة الحركات تحت تأثير الجاذبية، فإننا نحتاج إلى سَبع فئات على الأقل لكي نَشمل كافة أو أغلب الحالات المعروفة من التغيرات المفاجئة في العالَم الطبيعي. وبينما توجَد نماذج المَسارات الثلاثة في الكَون الحقيقي، وبالتالي تُمكِن ملاحظَتها ودِراستها، فإنه لا توجَد أمثلة واقعية مِن أنماط الكوارث النموذجية السَّبعة إلا في عالَم الرياضيات النظرية، وبذلك تَصعب دراستُها، ويَصعب تصوّرها أحيانًا. ولعلّ أسهل طريقة لِتَصوُّرها هي أنْ نَتخيَّل، كما تَخَيَّلَ توم، أنّ تجربةَ معايَشة كارثةٍ مفاجئة تشبه في نوعها حالة السقوط المفاجئ أثناء السَّير على سَطح هندسيّ خَطِر، والسقوط منه إلى سَطح آخَر! أي أنّ السقوط المفاجئ يشبه التغير المفاجئ في أننا نَجِد أنفسَنا فجأة في مكانٍ يختلف تمامًا عن المكان الذي كنّا فيه قُبيلَ سقوطِنا. يعني هذا التشابه أنّ الحِساب الرياضي في نظرية الكارثة يشبه في بعض نواحيه الحِساب الرياضي للسطوح الهندسية، وهي دِراسة مألوفة لأغلب علماء الرياضيات.

تَخَيَّلْ أنّ العوامل التي تتحكَّم بتَطور واتّجاه تَغَيُّر كارثة ما هي نفسها العوامل التي تُسيطر على تطوّر واتّجاه حركَتنا على السطح الهندسي النظري الموافِق لِنوعِ تلك الكارثة، يُسمَّى هذا السطح النظري: سَطح المراقَبة. وتشبه الكارثة حالة السقوط المفاجئ مِن سَطح المراقَبة هذا إلى سَطحٍ آخَر مُختلف. كما يعني هذا أنّ عدَد أَبعاد سَطح المراقَبة الموافِق لِكارثَةٍ ما، يساوي عدد

العوامل المسيطِرة على تلك الكارثة، بحيث يتحكَّم كل عامِل مُسيطِر بالحركَة على بُعدٍ واحِد مِن أبعاد سَطح المراقَبة.

إذا تَصوَّرنا أنّ الأوجُه المختلفة للتغيّر المفاجئ هي بمثابة سطوح هندسية خطِرة، فإنّ نظريةَ الكارثة تَعني أنّ أغلب الحالات التي نواجِهها في الطبيعة وفي أنفسنا تَتضمَّن سَبع وجوهٍ خطرة أساسية ومتميّزة، وهذه هي وجوهُ التغيُّر المفاجئ السَّبعة المألوفة. حتى نَتمكَّن من تَصَوّرِ هذه الأوجُه أو الحالات، مَنَحَها توم أسماء توحي بأشكالها، وهي تتألفُ حَسب تزايدها في التعقيد مِنَ أنواع الكوارث النموذجية التالية: الثَّنْيَة Fold، والشُرْفَة Cusp، وثلاثة أنواع من الذَّيل المَشقوق (مثل ذَيل طائر السنونو) Swallow-tail، ونوعَين مِن شَكل الفراشة Butterfly، وبذلك يبلغ عدد هذه الأشكال النظرية سَبعة.

الكارثةُ ذات الوَجه الذي يوافِق شَكلَ الثَّنْيَة Fold Catastrophe، هي كلُّ كارثةٍ يتحكَّم فيها عامِل مُسيطر واحِد، ولَها أبسَط الأشكال، حتى إنّ سَطح المراقَبة الذي يُوافِقها ليس سَطحًا في الحقيقة، بل هو خَطٌّ أفقيٌّ ذو بُعدٍ واحِد، تَنحَني إحدَى نهايتَيه إلى الأسفَل مِثل حافَّة هضبة أو جُرف صخري حادّ. وحَسب نظرية الكارثة، فهذا الخطّ هو التمثيل الرياضي النظري لِنفخِ البالون مثلًا، حيث تُمثّل زيادةُ ضغط الهواء في البالونِ السيرَ على الخطّ بعيدًا عن حافّة الهاوية. وبالطبع عندما نَنفخ البالون ونستمرُّ في ذلك فإننا نَصل إلى نقطة حيث سيؤديَ نَفخُ جُزيء واحِد آخَر مِن الهواء إلى انفجار البالون حَتمًا وتَقعُ هذه النقطة على حافّة الهاوية تمامًا، بينما يُمَثلُ انفجارُ البالون السقوطَ في الهاوية. وفي كارثة الثَّنْية، ليس للهاوية قاع، وليس هنالك بالتالي أي طريق للعَودة، وهذا يعني في مِثالنا أنه إذا انفجَر البالون، فلا يمكن أنْ يرجع إلى حالته السابقة قَبل الانفجار.

يُمَثّل التقدّم في العُمر حالةً مِنْ كارثة الثَّنْيَة أيضًا، إذ يُعتَبر الزمنُ هو العامِل المُسيطر الوحيد، ويعني السّير بعيدًا عن حافة الهاوية العودةَ إلى الشباب، في حين يعني التقدّم الطبيعي في العُمر السَّير نحو حافّة الهاوية، والوفاةُ هي السقوط فيها. وهكذا حَسب نظرية الكارثة، فإنّ حياةَ الإنسان تَتبعُ نمَطًا رياضيًّا مُماثلًا لِنَفخِ البالون، وتُشبه الوفاةُ انفجارَ البالون، فعندما تُفقَد الحياة لا يُمكِن أنْ تُستعاد.

أما الكارثة ذات الوَجه الذي يُوافِق شَكل الشُّرْفَة المقعَّرة السَّطح Cusp Catastrophe فلا تَنطبق عليها حالة اللاعودَة، وهي كلُّ كارثة يَتحكَّم فيها عامِلان مُسيطِران فقط. وحَسب نظرية توم، تتميَّز كارثةُ الشُرْفَة بالطريقة التي يتمّ فيها الإنقاذ مِنْ حالة الكارثة كليًّا أو جزئيًّا، ويُمكِن تَصوّر ما يَعنيه هنا بالنظَر إلى الوَجه الرياضي الذي يُوافِق كارثةَ الشُّرفَة حيث يوجَد في وَسط سَطح المراقَبة ذي البُعدَين جزءٌ بارز يلقي ظِلًّا مثلَّثَ الشَّكل على السَّطح أسفلَ مِنه مِثل الشُّرفَة أو الزاوية، وبحيث إنه إذا سَقطَ شخصٌ عن الجُزء البارز، فإنه يَتمكَّن دَومًا مِن الصعود والعودة ثانية إلى الحافّة، ويظلُّ باقيًا على سَطح المراقَبة في كل الأحوال. يَنطبقُ هذا الشكل الهندسي النظري على حالة لُعبة الطقطيقة المعدَنية التي تَنطبقُ عليها صفات كارثة الشُرفَة، ويَتحكَّم بها عامِلان مُسيطِران هما:

ضَغطَ الأصبع ومرونةَ اللِّسان المعدَني. ويُمكِن تصوير لِسان الطقطيقة في حالة الراحة وكأننا نَقف في مكانٍ ما على الشُّرفَة بعيدًا عن الحافّة، وعندما نزيد ضَغطَ الأصبع على لِسان الطقطيقة تدريجيًّا، فكأننا نتقدَّم نحو حافّة الشُّرفة، وفي لحظة معيّنة، يصبح ضغط الأصبع كبيرًا لِدَرجة أنّ لِسان الطقطيقة يَلتوي مُصْدِرًا صوتَ طَقَّة عالية، وهذا يُمَثِّل سقوطنا عن حافَّة الشُّرفة على جُزء آخَر مِن سَطح المراقَبة نفسه تحت الشُّرفة، ونظلُّ هناك طالما بَقيتْ الأصبع ضاغِطة على اللِّسان المعدَني، وعندما تَرفَعُ الأصبعُ ضغطَها عن اللِّسان ويعود إلى وضعية الراحة، يُمَثِّل هذا عودَتنا إلى الشُّرفة مِن جديد.

كارثة الشُّرفة هي أكثَر الوجوه التي نُقابلها في عالَم الطبيعة من بين أنواع الكوارث السبعة، ولا تُفَسِّر نظريةُ الكارثة سببَ ذلك، ولكن أيّ تفسيرٍ معقول يجب أنْ يأخُذَ في اعتِباره كَثرةَ وجودِ الأضداد في الواقع العملي، وما يَتعلَّق بها مِن حالات التغيّر المفاجئ الذي يَقبَل الانعكاس.

هناك أوجُه أخرى مألوفة لِكارثة الشُّرفة مِثل التَّصرُّف المتقلِّب للمريض النفسي المُصاب بِمَرَض الهياج والاكتئاب، وحالات السِّلم والحرب بين الأمَم المتصارعة، وتقلُّبات سوق البورصَة... إذ تُمَثِّل هذه الحالات نماذجَ أخرى لِكارثة الشُّرفة التي يتأرجَح فيها التغيُّر المفاجئ مِن جِهة مُتطرِّفَة إلى جِهة مُتطرِّفة أخرى، مع القدرة على الرجوع إلى الحالة الأصلية، ولذلك فإنّ هذه الظواهر، على الرغم من اختلافها الواضح، يُمكِن أنْ تُدْرَس ضمن علاقات ومعادلات رياضية واحِدة، ويُمكِن تَصوّرها على سَطحٍ رياضي نظَري واحِد. وهكذا نَتمكَّن بفضل نظرية الكارثة مِن رؤية مزيد مِن الاتِّفاق والانسجام في العالَم مِن حولنا.

أما الأنواع الخمسَة الأخرى مِن الكوارث، فلا نُقابلها بكَثرة مثلما نُقابل نماذج كارثة الشُّرفة المتوفِّرة في العالَم الطبيعي، كما أنه مِنَ الصعب تَصوُّر سطوح المراقَبة التي تُمَثِّلها وتُوافِقها. وتَرجِع صعوبة تَصوّر هذه السطوح إلى أنها ذات أكثَر مِنْ بُعدَين (لكي تَتوافَق مع الزيادة في عَدد العوامل المُسيطرة في الأنواع المعقَّدة مِن الكوارث) مما يَجعل هذه السطوح صعبةَ التصوُّر، لأنّ السطوح التي نَأْلَفُ مشاهدتَها أو تَخيّلها عادة، هي مُسَطَّحات ذات بُعدَين فقط (طول وعَرض)، وكلّ ما نستطيع تَخيّله هو أنْ نَتصوَّر خَيالَ أو مَسْقَطَ هذه السطوح المتعدِّدة الأبعاد على سَطحٍ مألوفٍ ذي بُعدَين فقط. ولكي يُبَيِّن توم أنّ هذه الأشكال هي مِن صُنع الخيال، كان يَميلُ دائمًا إلى ذِكْرِ أنّ كارثة الذَّيل المَشقوق قد مُنِحَتْ هذا الاسم مِن قِبَلِ صديقِه عالِم الرياضيات الفرنسي الأعمى برنار موران Bernard Moran...!

نلتقي في الطبيعة بحالات مِن نوع كارثة الفَراشة أكثَر مما نراه من كارثة الذَّيل المَشقوق، وفي الرياضيات، يَتميَّزْ سَطح المراقَبة الذي يُوافِق كارثة الفَراشة بوجود شُرْفتَين في وَسَطِهِ بدلًا من شُرفَة واحِدة، وهما مُرَتَّبتان على ارتفاعٍ متفاوِت بحيث يُمكِن أنْ يَسقط شخص مِنَ الشُّرفة العلوية إلى الشُّرفة السفلية أو على السَّطح الأدنَى الذي يَقع تَحتَهما، وكما هو الحال في سَطح كارثة الشُّرفة، يستطيع الشخصُ أنْ يعودَ إلى الشُّرفة العليا مرّة أخرى باقيًا على سَطح المراقَبة في كل الأحوال. وفي أغلب حالات كارثة الفَراشة، تُمَثِّل الشُّرفة الوسطى حالَةً وسطَى بين ما تُمَثِّله الشُرفة العليا

والسَّطح الأدنَى مِن سَطح المراقَبة المُعقّد هذا. فمثلًا يُمكِن لِدَولَتَين مُتصارِعَتَين أنْ تَقْبَلا المفاوضَة كَحَلٍّ وسطٍ بدلًا مِن الصراع المستمر بين الحَرب والسلام.

يُعتَبر مرَض فَقْدِ الشَّهية العُصابي Anorexia Nervosa أحَد الأمثلة القليلة على حالة الشُّرفة الوسطى في كارثة الشُّرفة، ويتأرجَح هذا المرض بين فتراتٍ مِنَ الصّوم الكامل أو الشَّره الزائد، وقد بَيَّنَ عالِم الرياضيات الإنكليزي إيريك زيمان[75] Erick C. Zeeman بعد ذلك في سبعينيات القرن العشرين أنه إذا كانت نظرية الكارثة صحيحة، فيجب أنْ نَتمكَّن مِنْ تحويل مرَضِ فَقْدِ الشّهية العُصابي مِنْ نمَط كارثة الشُّرفة إلى نمَط كارثة الفَراشة بإضافة عوامل مُسيطِرة أخرى إلى الحالة، وبَعد أنْ تَشَاوَرَ زيمان مع طبيب نفسي إنكليزي، وَضَع ذلك الطبيب طريقةً جديدة لعلاج هؤلاء المرضى بالاعتماد على هذه الفرضية، ويَتضمَّن هذا العلاج وَضْعَ المريض في حالة سُبات، ويُمَثِّل وَضْعُ المريض أو المريضة (لأنّ هذه الحالة تُصيب الإناث عادة) في حالَة السُّبات تَغيُّرًا مفاجئًا يُوافِق الانتقال مِنَ السطح الأدنَى (الصَّوم) أو مِنَ الشُّرْفَة العليا (الشَّراهة) إلى الشُّرْفَة الوسطَى في سَطح المراقَبة لِكارثة الفراشة. في هذه الحالَة المتوسطة، تكونُ المريضةُ في أكثَر حالاتها تَقَبُّلًا للعلاج النفسي. يُفسِّر زيمان هذا بقوله: *"عندما تكون المريضة في حالة الصيام والامتناع عن الطعام، فإنها تَنظُر إلى العالَم مِن حولها بِعَين القلق، وعندما تكون في حالة الشَّراهة فهي تَشعر أنّ العالَم يَسحَقها ويَقهرها، أما في حالة السُّبات والهدوء، فتكون منعزلة عن العالَم، ويكون عقلها وتفكيرها بعيدًا عن الانشغال بالطعام أو بالصوم".*

على الرغم مِن وجود أمثِلة كَهذه، والتي تُظهِر الإمكانيات العلمية لنظرية الكارثة، إلا أنّ الحِوار ما زال دائرًا بين علماء الطبيعة وعلماء الرياضيات عن فائدة هذه النظرية للعِلم على المدَى البعيد. يصرُّ المتشائمون على أنّ الفائدة العلمية لهذه النظرية مَحدودَة بسبب استِنادها إلى مَفهومٍ نوعيّ أساسًا هو مَفهوم تَمَاثُل الكوارث. وكما رأينا فإنّ الكوارث التي يتحكَّم فيها عَدد واحِد مِن العوامل المُسيطرة تُعتبَر كوارثَ متماثلَة وفقًا لِهذه النظرية مهما اختلفَت تفاصيلها وصِفاتها الأخرى، ويُركِّز علماءُ الرياضيات الذين يَشكُّون في الفائدة العلمية لهذه النظرية على أنّ هذه "التفاصيل والصِّفات الأخرى" التي تُهمِلها نظريةُ الكارثة هي التفاصيل والصِّفات التي قد يهتمّ العِلم بدراستها. فمَثلًا، في حالة مرَض فَقْدِ الشَّهية العُصابي، لا شك بأنّ العلماء يهتمّون بدراسة الحالة إلى دَرجة أبعَد وأعمَق مِن مجرد مَعرفة أنّ هذه الحالَة تَتبع مِن حيث نَوعها نَمطًا نموذجيًّا معيّنًا (كارثة الشُّرفة) يُمكِن تغييره إلى نمَط آخَر (كارثة الفراشة). وفي مرحلة معيّنة، لا شك بأنّ العلماء سيَرغبون بمعرفة التَّنويعات المختلفة التي يُمكِن أنْ تَحدُث في النَّمط النموذجي، ومن ثم اكتشاف الصِّفات المحدَّدة التي يُمكِن أنْ تَجعلَ الإنسانَ أكثَر أو أقلَّ تعرُّضًا للإصابة بمرَض فَقْدِ الشَّهية العُصابي.

مهما كانت الآراء السابقة صحيحة أو خاطئة، فإنّ نظرية توم هي بلا شك إضافة هامّة إلى الرياضيات، وإلى ثقافتنا وطريقتنا في النَّظر إلى الأمور: مِنْ ناحية، فهذه النظرية تُغْني لُغَةَ

الرياضيات بحيث إننا نستطيع الآن أنْ نُعَبِّر عن التغيّر المفاجئ الذي لم نَكن نستطيع وَصفَه مِنْ قِبل. كما أنّ نظرية توم وأساسها النظري النوعي، تُمَثِّل نقيضًا مُنعِشًا ووجهَة نظَر جديدة في مقابل التحليل الكَمِيّ المُفَصَّل الذي كان سائدًا في الرياضيات بلا مُنازع كما كتَب الفيزيائي الألماني برنهارد باڤينك Bernhard Bavink ذات مرة: *"لِوضع مفهوم الكمية القابلة للقياس والعدّ والحِساب في المركَز الثاني، وتقديم المفهوم الحَيوي الأساسي للشَّكل والصورة والنوعية إلى المركَز الأول".*

تَتضمَّن نظريةُ توم في الكوارث فوائدَ علمية، وتَحمل في طيَّاتها النظرةَ الحيوية المزدَوجة التي تتصوَّر أنّ الكلّ أكبَر مِنْ كلِّ جزء مِنْ أجزائه، وأنّ دراسة الكلّ يُمكِن أنْ تكون أكثَر فائدة وتوضيحًا مِنْ تَمحيص أجزائه. وللدفاع عن مِثل هذه الآراء، يُطيل توم شَرحُه لِعلماء الأحياء وعلماء الفيزياء في كِتابه: استقرار البُنْيَة وتَكَوُّن الشَكل Structural Stability and Morphogenesis حيث يؤكِّد على المخاطر والأخطاء التي يُمكِن أنْ نقَع فيها عندما نَدرس الأشياء عن قُربٍ شديد أكثَر مما يَجب، كما يتَحدَّى الاعتقاد العادي المُبسَّط بأنّ تفاعل عَدد صغير مِنَ الأجزاء الأولية البسيطة يَتضمَّن ويُفسِّر الظواهر الكُلِّية، في حين أنه في الحقيقة كلما صَغر مَجال وموضوع الدِّراسة العلمية، ازدادَ تعقيدها، حتى يَصِل الدَّارس إلى عالَم جديد، ويَصعب عليه فَهم وتِبيان عناصِر هذا العالَم المُصَغَّر التي تؤثِّر فِعلًا في الكَون والعالَم.

وَجد نيوتن منذ ثلاثمئة عام أنّ جِسمًا ذهبيًّا كُرويًّا طائرًا لا يَختلف في حَركَته عن جِسمٍ فضيٍّ مكعب مثلًا، وأنّ العامل المُسَيطر الوحيد الذي يُحدِّد مَسَار كل منهما تحت تأثير الجاذبية هو سرعةُ انطلاق كل منهما في بداية حركَته. وبالمِثل، وَجَد توم أنّ التغيّر المفاجئ الذي تَعيشُه أُمٌّ أيقظَها بكاءُ طفلها يَتبَع نظامًا رياضيًّا مُماثلًا لِحالة كلّ الأمهات مهما كانت جنسيتهنّ أو عِرقهنّ. في حالة نيوتن، فإنّ وجود الجاذبية هو السبب الذي يؤدي إلى خضوع كل الحركات المستمرة لواحِدٍ مِنْ ثلاثة مَسَارات نموذجية، وبالمِثل، يذكُر توم أنّ احتمال وجود "قوة الحياة" التي تؤدي إلى أنّ التغيرات المفاجئة تبدو وكأنها تَخضَع أيضًا لِمسارات أو تصرفات معيّنة قليلة. بل ويتنبَّأ أيضًا بأنّ قوة الحياة يُمكِن أنْ تَكون مُشابهة لِقوة الجاذبية أو الكهرومغناطيسية بحيث يُمكن اعتبار كلّ الأحياء أجزاء خاضِعة لِتأثير مَجال قوة الحياة.

يُمكِن أنْ تقودنا نظريةُ توم بشيءٍ مِنَ التَّنبؤ المتواضِع إلى رؤيةِ توضيحٍ رياضي بليغ لِسبب تعاطفنا وانسِجامنا مع العالَم الطبيعي، وذلك لأنّ فَهم وتصنيف الظواهر المختَلفة يَجعلها أقلّ غموضًا وأكثَر إلفَة بالنسبة لنا. وإنني أتساءل فيما إذا كان وجود أنواع الكوارث السبعة التي بَيَّنَها توم على كوكَب الأرض ينطَبق على أجزاء أخرى مِنَ المجموعة الشمسية والعوالِم الأخرى في الكَون الفسيح. وإذا كانت الرياضيات هي اللغة الكَونية التي يَتصوّرها كثيرٌ منّا، فإنّ التغيّر المفاجئ في أي مكان آخَر في هذا الكَون يجب أنْ يَحمِل وجوهًا مألوفَة كَتلك الوجوه التي نَراها على الأرض. لا شك بأنّ احتمال وجود بعض المفاجآت والتبادلات الغريبة الشاذّة هو احتمال قائم... تَصَوَّرْ مثلًا وجود عالَم تُطَقطِقُ فيه البالونات وتَنفجِر فيه الطَّقطيقات...!

عن الحرب والسلام:

المتوافقات Combinatorics

"لا يمكن أنْ يَحلَ المتشكّكون والمتشائمون مشاكل العالَم، لأنّ آفاقهم محدودَة بالوقائع الواضحة. نحن نحتاج إلى رجال يستطيعون أنْ يَحلموا بأشياء لم توجَد بَعد".

جون كنيدي John F. Kennedy

اقترحَ المُمثل الهَزلي جورج كارلين George Carlin طريقةً سَهلة لِتحقيق السلام العالمي: أنْ يصافِح كلّ واحِد الآخَر ويُعَرّف نفسه للآخرين...! وهذه فكرة جذابة ومُغرية، إلا أنها للأسف فكرة مثالية وخيالية، ولو طَبَّقَ كل واحِد منّا نصيحةَ كارلين وصافَح يَدًا أخرى كلّ ثانية لاستغرَق الأمر حوالي مئة سنة قَبل أنْ نتمكَّن مِنْ مصافَحة كل الآخرين في العالَم. ولكنّ نصيحة كارلين الهزلية تتضمَّن حقيقةً رَصينة جادّة في حياة الإنسان، وهي أننا نضطر لِتعديل كثير مِنْ أحلامنا وآمالنا الغالية بسبب ضَعفنا، أو بشكلٍ أدقّ، بسبب عدم قدرَتنا على التعامل مع الكَميات الكبيرة والأعداد الضخمة. فمَثلًا، في عالَمنا الذي يضمّ أكثر من سبعة بلايين إنسان، حيث يُمكِن أنْ تَندلِع الحَرب ويَشبَّ الخِلاف بين أي شخصَين أو أكثَر، هناك احتمال لأكثَر مِنْ مئة بليون بليون خِلاف مُمكِن. بوجود هذه الاحتمالات الهائلة التي قد تُهدّد السلام لا نستطيع أنْ نتوقَّع عالَمًا هادئًا مسالمًا خاليًا مِن النزاعات والخِلافات، حتى لو انشَغل كل واحِد منّا لبعض الوقت في محاولة تحقيق السلام.

في عالَم الرياضيات أيضًا، هناك بعض المسائل التي تُعجِز علاقاتها ومعادلاتها الكثيرة كل الطرائق في حلِّها. أحَد هذه المسائل المعروفة هي مشكلة البائع المتجوّل بين المدن (مندوب شركة) التي تَطرح هذا السؤال: ما هو الترتيب الذي يجب على البائع المتجوّل أنْ يَتبعه في سَفَرِه إلى المُدُن التي يجب عليه زيارتها بحيث يَقطَع أقلّ مَسافة مُمكِنة؟ والجوابُ سَهلٌ إذا كان عدد هذه المُدن قليلًا، ولكن إذا كان عليه أنْ يَزور خمسين مدينة مَثلًا، فهناك أكثَر مِنْ عشرة آلاف مليون مليون ترتيبٍ مختلفٍ عليه أنْ يَختار منها واحِدًا فقط...!

يُطلَق اسم دراسة المُتوافِقات Combinatorics في الرياضيات على المسائل التي تحتاج إلى تحليلِ أشياء كثيرة متوافِقة، ويَتضمَّن هذا التحليل عادةً دراسةَ كل التجمعات والترتيبات المختلفة بِهدف اكتِشاف التآلف أو التوافق المِثالي الذي يَحلُّ المسألة. تحتوي أغلب هذه المسائل عادة على عدد قليل مِنَ المتوافقات المختلفة بحيث يمكن اكتشاف الحلّ بسهولة، مِثل مسألة اختيار أزواجٍ مِنْ

اثني عشر جَوربًا بكل الاحتمالات الممكِنة (66 احتمال)، أو تشكيل كُسور مِنَ الأعداد الصحيحة العشرة الأولى (45 احتمال)، أو ترتيب اثنَي عَشر ضَيفًا على ثلاث موائد (220 احتمال)... ولكن في بعض المسائل، يكون عَدد المتوافِقات المُمكِنة هائلًا، ويبلغ أكثَر مِنْ عدد النجوم في الكَون بحيث لا يستطيع ولا حتى أسرَع كومبيوتر في العالَم أنْ يتوصَّل إلى الحلّ في وقتٍ معقول. تَنطبقُ هذه الحالَة على مسألة زيارة البائع المتجوّل لِخَمسين مدينة، إذ يبلغ عدد المتوافقات والترتيبات المُمكِنة في هذه المسألة وأمثالها عددًا هائلًا لِدَرجةِ أنّ أَمَلَ علماء الرياضيات في قُدرتِهم على حَلِّها قد تواضَعَ إلى قبولهم لِحلٍّ وسَط يَتَمَثَّل بقبولهم لِحلول تقريبية غير كاملة في مِثل هذه المسائل.

تُصَنَّف درَجة صعوبة وكِبر المسائل في عِلم المتوافقات عادةً بحسب الزمن الذي يحتاج إليه الكومبيوتر لِحلِّ كل المتوافقات والترتيبات المُمكِنة. يزداد هذا الزمن كلما ازداد عدد العناصر في المسألة. ولذا، يُحَدِّدُ عدد العناصر كِبَر المسألة. وفي مثالنا عن البائع المتجوّل، فإنّ كِبر المسألة يحدِّده عدد المُدُن التي يجب على البائع زيارتها. هناك ثلاث درجات رئيسية مِنَ الصعوبة هي على الترتيب المتصاعد: المسائل الحسابية Arithmetic Combinations، والمسائل المتعدِّدة الحُدود Polynomial Combinations، والمسائل غير المتعدّدة الحُدود Non-polynomial Combinations.

في المسائل الحِسابية (التي تزداد بشكلٍ طَرديّ بسيط)، يزداد الوقت الذي يحتاج إليه الكومبيوتر لِحساب كل المتوافقات والترتيبات الممكِنة بتَناسبٍ طَرديٍّ بسيط مع زيادة عدد عناصر المسألة، مثلما هي الحال في مسألة ترتيب الزواج عن طريق الكومبيوتر مثلًا، حيث يجب على الكومبيوتر أنْ يبحث في لائحة المُرشَّحين لكي يَجِدَ المُرشَّح المطابق لمواصفات معيّنة في شخص آخَر، فإذا تضاعَف عددُ المُرشَّحين، تضاعَفَ الزمن الذي يحتاج إليه الكومبيوتر في بَحثِه.

أما في المسائل المتعدّدة الحُدود (التي تزداد بشكلٍ أُسّيّ)، فيزداد الزمن الذي يحتاج إليه الكومبيوتر بشكل أُسّيّ (مربَّع أو مكعَّب عدد عناصر المسألة...)، كما في محاولة حِساب: كم هو عدد لوحات السيارات المختلفة التي يُمكِن تشكيلها باستِخدام ثلاثة أرقام وثلاثة حروف؟ وبفرَض أنّ لديكَ 26 حرفًا مِن حروف الأبجدية، وعشرة أرقام (مِنَ الصفر إلى التسعة)، فإنك تستطيعُ تشكيل 17576000 لوحَة مختلفة. وإذا تضاعَف عدد الحروف والأرقام مرّة أو مرتَين، يتضاعف عدد المتوافقات والترتيبات (اللوحات) المختلفة ثماني مرات أو سَبع وعشرين مرة...!

في المسائل غير المتعدّدة الحُدود، يزداد الزمن الذي يحتاج إليه الكومبيوتر في حلِّها بشكل أسّيّ متزايد، مِثل الزيادة السريعة في عدد الجراثيم في مزرعةٍ مخبرية. أغلبُ مسائل هذا النوع هي مسائل عمَل الجداول والبرامج حيث تتركَّز المسألة في مَعرفة الجدول المثالي الذي يُحقّق الغَرض المطلوب كأفضَل ما يُمكِن، كما هو الحال في مسألة البائع المتجوّل، والمسائل الأخرى التي تشبهها، مِثل ترتيب المطارات الذي يجب أنْ تَتبَعه طائرةُ رُكّاب مَدَنيّة في رحلاتها التجارية. تحاول شركات الطيران دائمًا ترتيب نزول الطائرات في المطارات المختلفة بحيث تُقلِّل ما أمكَن مِنْ تكاليف الرحلة، وتؤمِّن نَقلَ أكبَر عدد مُمكِن مِنَ الركاب، وخِدمة أكبَر عدد مُمكِن مِنَ المُدُن في الوقت نفسه. يُمكن أنْ تَخرج الأمور عن السيطرة وعن التَّحكم الأمثَل بسهولة، فمَثَلًا عندما طَوَّرَتْ إحدى

شركات الطيران الأمريكية خدماتها مِنْ ستّة مطارات إلى أربعة وعشرين، ازداد عدد البرامج التي يُمكِن أنْ تَتبعها طائراتها مِنْ اثنَين وثلاثين طريقًا إلى 1048576، أي بزيادة قَدرها 32768 ضِعفًا في عَدد المتوافقات والترتيبات المختلفة المُمكِنة، مقابل زيادة قَدرها أربعة أضعاف فقط في عَدد عناصر المسألة.

بالنظر إلى هذه الدَّرجة مِنَ التعقيد، ليس مُستغرَبًا أنْ الأمر كان يحتاج (في أواخر الستينيات) إلى ثلاثين خبيرًا وكومبيوترَين في شركات الطيران يَعملون عادةً لمدة سنتَين كاملتَين لكي يتوصَّلوا إلى جَدول عَمل شامِل واحِد.

في هذه الأنواع الثلاثة مِنْ مسائل المتوافقات، يزداد كِبَر المسائل الحسابية والمسائل المتعدّدة الحُدود بشكلٍ تدريجي مع تزايد كِبَر المسألة بحيث يستطيع علماء الرياضيات حلَّها عادةً إلا بمساعدة الكومبيوتر. ويستطيعون حلَّ بعض المسائل غير المتعدّدة الحُدود إذا كانت صغيرة (لا تضمّ عددًا كبيرًا من العناصر)، ولكن، حتى بمساعدة أقوى وأسرع أجهزة الكومبيوتر الحديثة، فإننا قد نحتاج إلى أكثر مِنْ 30000 سنة لِمعرفة جميع المتوافقات المُمكِنة في مسألة غير متعدّدة الحُدود مِنْ حَجم مسألة البائع المتجوّل الذي يجب عليه زيارة خمسين مدينة. ويبدو أنّ صُنع كومبيوتر يستطيع حلَّ مِثل هذه المسائل لن يكون مُمكِنًا في المستقبل القريب. حَلَّ هذا الاعتقاد المتشائم في السنوات الأخيرة مَحلَّ ذلك التفاؤل الذي غَمَر علماء الرياضيات عندما اخُترع أول أجهزة الكومبيوتر في الأربعينات. فقد اختُرع آنذاك جهاز الكومبيوتر UNIVAC، وتَصوَّر علماء الرياضيات أنّ حلَّ المسائل الكبيرة مِنَ النوع غير المتعدّد الحُدود سَيصبِحُ مُمكِنًا حالما يتم اختراع وتطوير أجهزة الكومبيوتر القوية والسريعة. وعلى مرّ السنين، أصبَحتْ أجهزةُ الكومبيوتر فِعلًا أقوى وأسرع، ولكن أصبح مِنَ الواضح أيضًا أنها لمْ تستطع حلَّ المسائل الكبيرة مِنْ هذا النوع، وأنها لن تَتمكَّن مِن ذلك في المستقبل القريب.

بدلًا مِنْ أنْ يَتخلَّى علماءُ الرياضيات عن آمالهم في حَلّ هذه المسائل الكبيرة، حاولوا تحقيق هدفٍ أكثَرَ تواضعًا. ففي خلال العقدَين الأخيرَين، ركَّز علماءُ الرياضيات جهودهم واهتمامهم على التوصُّل إلى الحلول التقريبية باستِخدام أساليب لا تحتاج إلى معرفةِ جميع المتوافقات والترتيبات المُمكِنة في المسائل الكبيرة مِنْ نوع المتوافقات غير المتعدّدة الحُدود. تَرتكِزُ هذه الحلول "المتفائلة" إلى قُدرة عالِم الرياضيات على تحديد الميزات التي يجب أنْ يتَّصِف بها الحَلُّ الحقيقي، ثم يحاول التوصُّل إلى الحلِّ التقريبي المقبول الذي يتَوافَق مع هذه الصفات المختارة، مثلما يحاول المدرِّس وَضْعَ منهاجِ الدراسة الذي يتَّفقُ مع أهداف تربوية معيَّنة. يُعتبر هذا الحلّ أفضَل حَلّ مُمكِن، لأنه يتَّفق مع مواصفات معيَّنة، ويَتميَّز بصفات مطلوبة، وبذلك يَحلُّ مشكلة معيّنة. ولكنه يختلف عن الحلّ الحقيقي بأنه ليس حَلًّا كاملًا ولا فَريدًا في صِحَّته. ويَرجع ذلك إلى أنّ الصِّفات الأساسية التي استُنِد إليها في التوصُّل إلى هذا الحلّ ما هي في الحقيقة إلا نوع مِنْ حُسن التقدير أو الحَدس المثقَّف.

يَستند أحَد الحلول المفضَّلة لِمشكلة البائع المتجوّل على قاعدة بسيطة هي أنّ هذا البائع لا بدّ مِنْ أنْ يبدأ رحلته مِنَ المدينة التي يُقيم فيها، وأنْ يتحرَّك إلى أقرَب مدينة مُجاورة حَسب التقدير العادي السليم، إلا أنّ هذه القاعدة المنطقية لن تقودنا بالضرورة إلى الحلّ الحقيقي الكامل (وهو

أقصَر الطّرق المُمكِنة بين المُدن الخَمسين). تَوصَّل علماء الرياضيات إلى هذا التقدير العملي بمقارنة الحلّ المفضَّل بالحلِّ الحقيقي لِمسائل البائع المتجوّل الصغيرة التي يُمكِن حلُّها، ومِنَ المقبول عقلانيًّا اعتبار أنّ هذه المقارنة تُمَثِّل أيضًا مَجالَ الخطأ الذي يقَعُ فيه الحلُّ المفضَّل بالمقارنة مع الحلِّ الحقيقي في المسائل الكبيرة مِن النوع نفسه.

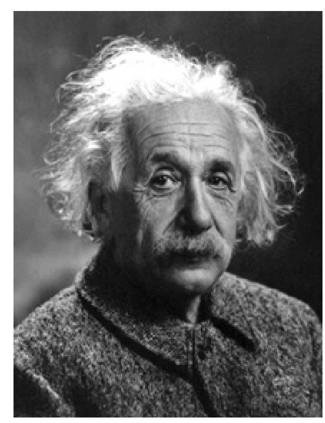
يتَّضِح عدم كَمال وعدم فردية الحلّ المفضَّل بشكلٍ خاصّ في مشكلة شركات الطيران عندما تُحاول حلَّ مسألة جَدول الرحلات (وهي مسألةٌ مِنْ نوع المتوافقات غير المتعدّدة الحُدود)، ففي هذه الأيام، تَستخدم شركات الطيران متوافقات وترتيبات لأربعة مخطّطات مختلفة هي: جدول حَذف الوَقفات، وجدول المنطقة، وجدول عدم التوقّف، وجدول التَّرابط المتقاطع. ومِنَ الواضح أنّ جميع هذه المخطّطات تَنطلقُ أساسًا مِنْ حُسن التقدير العملي السليم.

في جَدولِ حَذف الوَقفات، تتوقَّف الطائرة في مدينةٍ، وتتَجنَّب الوقوفَ في المدينة التي تَليها، ثم تَتوقَّف في المدينة التي بَعدها، ولا تَتوقَّف في المدينة التالية... وهكذا على طول خطّ طيرانها. يُؤَمِّنُ هذا المخطّط خدمَة معقولة في مسافاتٍ متوسطة متقاربة. أما في جدول المنطقة، فتهبط الطائرة في جميع المُدن الواقعة في منطقة معيَّنة مُحدَّدة على خَطِّ طيرانها بحيث تُؤَمِنُ خدمةً ممتازة على مسافات قصيرة. أما في جدول عدم التوقّف، فتَطير الطائرة إلى مُدنٍ رئيسية متباعِدة بحيث تُؤَمِّنُ خدمةً سريعة إلى مسافات بعيدة. وأخيرًا في جَدول التَّرابط المتقاطع، تُقَدِّم شركات الطيران اختيارات أوسَع للمسافرين لكي يتَّجهوا إلى المكان الذي يرغبون، وذلك بإنهاء الرحلات في مطار كبير مشترَك، كَمطار شيكاغو مثلًا، لأنه لا يُمكِن لأي شركة طيران أنْ تُقَدِّم رحلات دون توقّف بين كلّ المُدن. وهكذا بفَضلِ جَدول التَّرابط المتقاطِع، يستطيع مسافرٌ مِنْ مدينةٍ صغيرة في شَرق البلاد، إلى مدينة صغيرة في غَربها، أنْ يُغَيِّر الطائرة في مطار كبير (نقطة ترابط متقاطِع) يقَع على الطريق بينهما.

على الرغم من أنّ عدم إمكانية حلّ المسائل الكبيرة في مجال المتوافقات قد دفَع أغلب علماء الرياضيات إلى تركيز جهودهم على التوصُّل إلى الحلول المفضَّلة بدلًا مِنَ الحلول الحقيقية في مِثل هذه المسائل، إلا أنّ اكتشافًا جديدًا في عِلم المتوافقات قد أيقَظ مِنْ جديد حُلم التوصُّل إلى حلِّ هذه المسائل لدَى بعضهم، إذ اكتشَف عالِم الرياضيات الأمريكي ريتشارد كارب[76] Richard Karp سنة 1971 وجود نوعٍ خاصّ مِنْ مسائل المتوافقات الكبيرة غير المتعدّدة الحُدود يُمكن اعتباره نوعًا نموذجيًّا لِكلِّ هذه المسائل، وقد أَطلقَ كارب على هذا النوع مِنَ المسائل: مسائل المتوافقات التامّة، لأنه بَرهَن على أنه إذا استطاع علماء الرياضيات حلَّ مسألةٍ واحدة مِنْ مسائل المتوافقات التامّة هذه، فسوف يَتمكّنون مِنْ حلِّ جميع مسائل المتوافقات غير متعدِّدة الحُدود، بما فيها مسألة البائع المتجوّل.

قَرَّبَ اكتشافُ كارب علماءَ الرياضيات مِن حلِّ مسائل المتوافقات الكبيرة، ولم يُقَرِّبهم مِن ذلك في الوقت نفسه، إذ إنه لم يُحَسِّنْ مِنْ عَجزنا في التعامل مع المسائل ذات العدد الكبير مِنَ المتوافقات، ولكنه رَكَّزَ هذا التحدي أمام علماء الرياضيات إلى حَدٍّ بعيد، وبذلك فقد قَرَّبهم قليلًا مِنْ احتمال التوصّل إلى النجاح في الحلّ.

تتأثَّر دراسةَ المتوافقات هذه الأيام بالطبيعة الإنسانية، لأنّ علماءَ الرياضيات الذين يَبحثون عن أفضَل حلٍّ ممكِن عندما يَعجزون عن التوصُّل إلى الحلِّ الحقيقي، إنما يتَصرَّفون كما يتَصرَّفُ البَشَر الذين يَبحثون عن السلام المُمكِن عندما يَعجزون عن التوصُّل إلى السلام الحقيقي الكامل، وهم يَقبَلون السلام التقريبي المُمكِن آمِلين دائمًا بوضع حَدٍّ نهائيّ للصراع والوصول إلى السلام الحقيقي التام. يَنتقِل بِنا هذا التشابه بين الحالتَين خطوة أخرى إذ نقول إنّ إمكانية توصُّل علماء الرياضيات إلى حلِّ مسألة البائع المتجوّل في تَنقله إلى خمسين مدينة، تشبه في صعوبتها إمكانية توصُّلنا إلى تحقيق السلام الحقيقي في العالَم. ونحن لا نَملكُ بِحُكمِ طبيعتنا الإنسانية إلا أنْ نشعر بشيءٍ مِنَ الأمل، وأنْ نُحَلِّق مع الأحلام المتفائلة مهما كانت هذه الأحلام والآمال صعبة وبعيدة المَنال. وإنّ اكتشافات كارب في دراسة المتوافقات، واقتراح جورج كارلين في تحقيق السلام العالمي عن طريق التعارف والمصافَحة، تُثيرُ في أعماقنا تلك الأحلام المتفائلة والآمال الكبيرة... الأمل بأننا ذات يوم إذا استَطعنا حلَّ مسألة كبيرة واحدة مِنْ هذه المسائل والمشاكل الصعبة، سواءً كانت مسألة البائع المتجوّل، أو مشكلة الصراع والخِلاف بين البَشَر في العالَم، فإنّ جميع المسائل والمشاكل مِنْ هذا النوع ستُصبح قابلة للحَلّ. [المترجم: وبذلك نَخرج مِنْ غموض المجهول إلى وضوح المَعرفة، ومِنْ تردُّد الحَدس والتَّخمين إلى ثقة الرياضيات واليقين].



ألبرت أينشتاين Albert Einstein

(1879-1955)

[ألبرت أينشتاين (1879-1955) عالِم فيزيائي شهير ألماني الأصل. أشهَر منجزاته هي نظرياته العامة والخاصة في النسبية، ومعادلته الشهيرة $E=MC^2$ التي تُعتَبر الأساسَ النظري لأبحاث الطاقة الذَريّة. حصَلَ على جائزة نوبل في الفيزياء سنة 1921 تقديرًا لأبحاثه في الطاقة الكهرضوئية، كما حصَلَ على لَقب رَجُل القَرن العشرين في مجلة التايم سنة 1999].



[برنهارد ريمان (1826-1866) عالِم رياضيات شهير قدَّم دراسات مهمة في الهندسة التحليلية أدَّت فيما بَعد إلى ظهور النظرية العامة في النسبية، وأسَّس نظامًا خاصًّا في الهندسة. توفي شابًّا بسبب إصابته بالسلّ].

برنهارد ريمان Bernhard Riemann

(1826-1866)



[رينيه ديكارت (1596-1650) عالِم رياضيات وفيلسوف فرنسي شهير، يُعتبر مؤسس الفلسفة الحديثة ومِن أهم مؤسسي الثورة العلمية. له دراسات مهمة في اللاهوت. يُعتبر مؤسس الهندسة التحليلية، وصاحب المَقولة الفلسفية الشهيرة: "أنا أفكِّر إذًا أنا موجود"].

رينيه ديكارت René Descartes

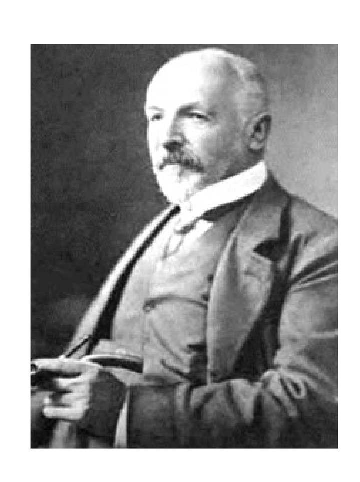
(1596-1650)



[كارل فريدريك غاوس (1777-1855) عالِم رياضيات وفيزياء ألماني شهير، له نظريات هامة في عِلم الأعداد والإحصاء والتحليل والهندسة التفاضلية وعِلم الفلك والبصريات. حَمل لَقب أمير علماء الرياضيات، ويَعتبره كثيرون أهمّ علماء الرياضيات في التاريخ الحديث، وأكثرهم تأثيرًا في تطوّر الرياضيات].

كارل فريدريك غاوس Carl Friedrich Gauss

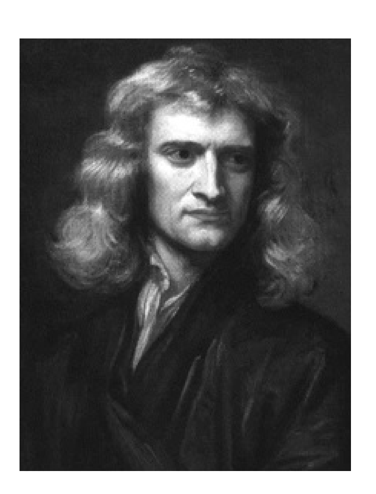
(1777-1855)



[جورج كانتور (1845-1918) عالِم رياضيات روسي المولد ألماني النشأة. وضَع مبادئ نظرية المجموعات في الرياضيات والأعداد ما بَعد اللانهائية، وكان يجيد العَزف على آلة الكَمان بمَهارة].

جورج كانتور George Cantor

(1845-1918)



[إسحاق نيوتن (1643-1727) عالِم رياضيات إنكليزي شهير. كتَبَ أيضًا دراسات مهمة في الفيزياء والفلك والفلسفة واللاهوت. يُعتبر كِتابه في مبادئ الرياضيات الذي نُشِر عام 1687 أهمّ كِتاب في تاريخ العلوم. وضَع مبادئ الجاذبية وقوانين الحركة، وطبّقها في وَصف الكَون، وبذلك يُعتبر مِنْ مؤسسي الثورة العلمية الحديثة. له دراسات مهمة أيضًا في عِلم الضوء ودراسة الطّيف وقياس سرعة الصوت وأُسس حساب التفاضل والتكامل].

السير إسحاق نيوتن

Isaac Newton (1643-1727)

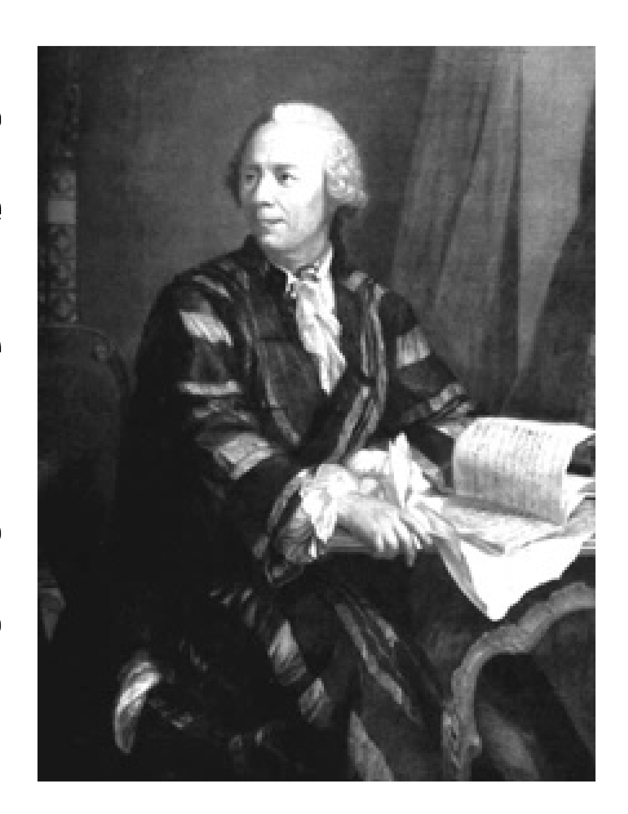


[غوتفريد لايبنيتز (1646-1716) عالِم رياضيات وفيلسوف ألماني هام، وضَع مبادئ حساب التفاضل والتكامل، ونظام الأعداد الثنائية المستخدَم في أجهزة الكومبيوتر. يُعتبر مِنْ أهم الفلاسفة العقلانيين في القَرن السابع عشر. له كتابات مهمة في الفيزياء والتِقانة والطب والجيولوجيا وعِلم النفس، كما كتَب في السياسة والقانون والتاريخ].

غوتفريد لايبنيتز Gottfried Leibnitz

(1646-1716)

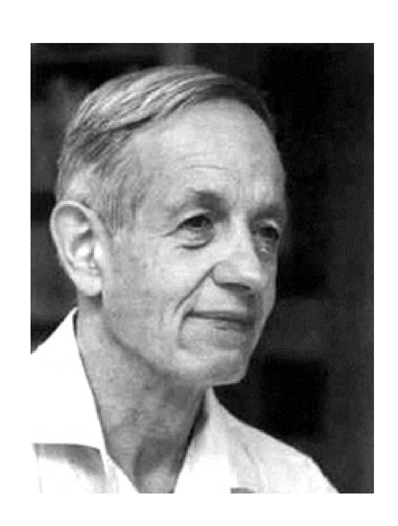
[ليونهارد أويلر (1707-1783) عالِم رياضيات وفيزياء سويسري الأصل. عاش معظم عمره في روسيا وألمانيا. يُعتبر أهمّ عالِم رياضيات في القَرن الثامن عشر، ومِنْ أهم علماء الرياضيات في التاريخ. شملتْ دراساته الرياضيات التحليلية وعلوم الجَبر وحساب التفاضل وأُسس عِلم الطوبولوجيا. أضاف في الرياضيات اصطلاحات مهمة مثل القِوى (الأسّ) واللوغاريتمات الأسّية والطبيعية، وله إضافات هامة في نظرية الأعداد والهندسة وفيزياء الضوء].



ليونهارد أويلر Leonhard Euler

(1707-1783)

[جون ناش (1928-2015) عالِم رياضيات واقتصادي أمريكي، له كتابات مهمة في نظرية المباراة والهندسة التحليلية. عمل في جامعة برينستون الأمريكية، وحصل على جائزة نوبل في العلوم الاقتصادية عام 1994 تقديرًا لدراساته في نظرية المباراة].

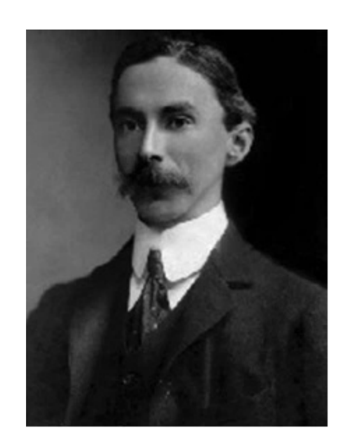


جون ناش John Nash

(1928-2015)

برتراند رَسل Bertrand Russell

(1872-1970)



[برتراند رَسل (1872-1970) عالِم رياضيات وفيلسوف إنكليزي شهير، كتَب أيضًا في المنطق والتاريخ والسياسة، وكان معارِضًا للحروب والأسلحة النووية والحُكم الاستبدادي الشامل، وعارضَ حرب فييتنام والاحتلال الإسرائيلي لفلسطين. تعرّض للسَجن بسبب مواقفه الداعية للسلام العالمي. حصَل على جائزة نوبل في الأدب عام 1950 تقديرًا لكتاباته الإنسانية وتأييده لحرية الفكر].

Notes

[1←]
ليونهارد أويلر (1707-1783) عالم رياضيات وفيزياء سويسري الأصل. عاش معظم عمره في روسيا وألمانيا. يعتبر أهم عالم رياضيات في القرن الثامن عشر ومن أهم علماء الرياضيات في التاريخ. شملت دراساته الرياضيات التحليلية وعلوم الجبر وحساب التفاضل وأسس علم الطوبولوجيا. أضاف في الرياضيات اصطلاحات مهمة مثل القِوى (الأسّ) واللوغاريتمات الأسّية والطبيعية، وله إضافات هامة في نظرية الأعداد والهندسة وفيزياء الضوء.

[2←]
دنيس ديدرو (1713-1784) فيلسوف فرنسي من أهم فلاسفة النهضة. إلحادي الفكر. قدَّم أول موسوعة شاملة في اللغة الفرنسية استغرق تأليفها 20 سنة، وطرح فيها أفكارًا جديدة مهمة في التسامح الديني وحرية التفكير والديموقراطية.

[3←]
غاليليو غاليلي Galileo Galilei (1564-1642) عالم إيطالي شهير بحث في الفيزياء والرياضيات والفلك والفلسفة وكان من أهم مفكري عصر النهضة والثورة العلمية. اخترع التلسكوب واستخدمه في دراسة الفلك والنجوم. اصطدم مع الكنيسة بسبب أبحاثه عن الكون وحُكم عليه بالإقامة الجبرية في منزله منذ عام 1638 حتى وفاته.

[4←]
جورج كانتور (1845-1918) عالم رياضيات روسي المولد ألماني النشأة. وضع مبادئ نظرية المجموعات في الرياضيات والأعداد ما بعد اللانهائية، وكان يجيد العزف على آلة الكمان بمهارة.

[5←]
غودفري هاردي Godfrey H. Hardy (1877-1947) عالم رياضيات إنكليزي ساهم في تطوير نظرية الأعداد والرياضيات التحليلية.

[6←]
برنهارد ريمان (1826-1866) عالم رياضيات شهير قدَّم دراسات مهمة في الهندسة التحليلية أدت فيما بعد إلى ظهور النظرية العامة في النسبية، وأسس نظامًا خاصًّا في الهندسة. توفي شابًّا بسبب إصابته بالسلّ.

[7←]
أرسطو Aristotle (384-322 ق.م.) فيلسوف إغريقي شهير كان تلميذًا للفيلسوف أفلاطون وأستاذًا للقائد الشهير الإسكندر المقدوني. كتب في مواضيع عديدة شملت الفلسفة والرياضيات والشعر والمسرح والموسيقى والسياسة والعلوم الطبيعية.

[8←]
إقليدس Euclid (300 ق.م.) عالم رياضيات إغريقي شهير عاش في الإسكندرية ويعتبر مؤسس علم الهندسة. يعتبر كتابه "العناصر" أهم كتاب في تاريخ الرياضيات.

[9←]
توما الأكويني (1225-1274) قديس كاثوليكي إيطالي كتب دراسات مهمة في الفلسفة واللاهوت ويعتبره كثيرون أهم الفلاسفة اللاهوتيين في تاريخ الكنيسة الكاثوليكية. ولد في صقلية ودرس في جامعة نابولي وعلوم اللاهوت في كولونيا وباريس. تأثر بفلسفة أرسطو وابن رشد في كتاباته اللاهوتية.

[10←]
غوتليب فريجيه (1848-1925) عالم رياضيات ألماني له دراسات مهمة في علم الأعداد ونظرية المجموعات وكتب أيضًا في الفلسفة والمنطق.

[11←]
برتراند رَسل (1872-1970) عالم رياضيات وفيلسوف إنكليزي شهير كتب أيضًا في المنطق والتاريخ والسياسة وكان معارضًا للحروب والأسلحة النووية والحكم الاستبدادي الشامل وعارض حرب فييتنام والاحتلال الإسرائيلي لفلسطين. تعرض للسجن بسبب مواقفه الداعية للسلام العالمي. حصل على جائزة نوبل في الأدب عام 1950 تقديرًا لكتاباته الإنسانية وتأييده لحرية الفكر.

[12←]
المترجم: مثال آخر على هذا النوع من المجموعات هو قولنا إن السوريين والمصريين والجزائريين والسودانيين والسعوديين... يشكلون مجموعة من الناس هي "مجموعة العرب"، في حين أن كل مجموعة من الآخرين مثل الإنكليز والأمريكان والروس واليابانيين والألمان والبرازيليين... يمكن أن تكون عضوًا في مجموعة من الناس هي مجموعة "غير العرب"، ولكن كل الناس الذين يشكلون "مجموعة غير العرب" هذه يؤلفون في مجموعهم ككلّ عضوًا من أعضاء "مجموعة غير العرب" في الوقت نفسه.

[13←]
كورت غودل (1906-1978) عالم نمساوي تشيكي الأصل يعتبر من أهم الباحثين في المنطق والفلسفة وعلاقتها بالرياضيات. كان صديقًا حميمًا للعالم الفيزيائي الشهير ألبرت أينشتاين وعمل معه في جامعة برنستون الأمريكية.

[14←]
إيمري لاكاتوس (1922-1974) عالم رياضيات وفلسفة هنغاري الأصل يهودي الديانة وشيوعي المذهب. هرب إلى إنكلترا بعد الغزو السوفييتي لهنغاريا عام 1956 حيث نشر أعماله في فلسفة الرياضيات وفلسفة العلم. توفي فجأة في عمر 52 سنة بسبب إصابته بنزيف في الدماغ.

[15←]
كارل بوبر (1902-1994) فيلسوف إنكليزي من أصل نمساوي يعتبر من أهم الباحثين في فلسفة العلم في القرن العشرين. كتب أيضًا في علوم الاجتماع والسياسة.

[16←]
دافيد هيلبرت (1862-1943) عالم رياضيات ألماني يعتبر من أهم علماء الرياضيات في عصره. له أبحاث مهمة في الهندسة التحليلية كانت بمثابة مقدمات لنظريات النسبية ونظريات الميكانيك الكمّي (المَوجي).

[17←]
ظهرتْ بدايات مفهوم حساب التفاضل والتكامل في كتابات علماء الرياضيات الإغريق مثل إقليدس وأرخميدس وأبولونيوس، كما ظهرتْ في كتابات العالِم الهندي أرياباتا Aryabhata (550-476 ق.م.) في دراسته لحركة القمر، وكتابات ابن الهيثم (965-1039) وشرف الدين الطوسي (1135-1213).

[18←]
إسحاق نيوتن (1643-1727) عالم رياضيات إنكليزي شهير. كتب أيضًا دراسات هامة في الفيزياء والفلك والفلسفة واللاهوت. يعتبر كتابه في مبادئ الرياضيات الذي نشر عام 1687 أهم كتاب في تاريخ العلوم. وضع مبادئ الجاذبية وقوانين الحركة وطبقها في وصف الكون وبذلك يعتبر من مؤسسي الثورة العلمية الحديثة. له دراسات مهمة أيضًا في علم الضوء ودراسة الطيف وقياس سرعة الصوت، وأسس حساب التفاضل والتكامل.

[19←]
غوتفريد لايبنيتز (1646-1716) عالم رياضيات وفيلسوف ألماني هام، وضع مبادئ حساب التفاضل والتكامل ونظام الأعداد الثنائية المستخدم في أجهزة الكومبيوتر. يعتبر من أهم الفلاسفة العقلانيين في القرن السابع عشر. له كتابات مهمة في الفيزياء والتِقانة والطب والجيولوجيا وعلم النفس، كما كتب في السياسة والقانون والتاريخ.

[20←]
ألبرت أينشتاين (1879-1955) عالم فيزيائي شهير ألماني الأصل. أشهر منجزاته هي نظرياته العامة والخاصة في النسبية ومعادلته الشهيرة E=MC2 التي تعتبر الأساس النظري لأبحاث الطاقة الذَرّيّة. حصل على جائزة نوبل في الفيزياء سنة 1921 تقديرًا لأبحاثه في الطاقة الكهرضوئية، كما حصل على لقب رجل القرن العشرين في مجلة التايم سنة 1999.

[21←]
فيثاغورس (570-500 ق.م.) عالم رياضيات وفيلسوف إغريقي ولد في جزيرة ساموس على الساحل الجنوبي لتركيا وكانت أمه إغريقية ووالده فينيقي من مدينة صور. عُرف بنظريته الشهيرة في دراسة المثلثات قائمة الزاوية، ويُعتبر مؤسس علم الأعداد والحساب. اتخذت آراؤه الفلسفية طابعًا دينيًا منح الأعداد صفات صوفية وباطنية. كان أول من وصف بالفيلسوف بمعنى "مُحِبّ الحكمة".

[22←]
استُخدِم اصطلاح الأعداد (المعقولة) للتعبير عن الأعداد الكسرية العادية لأنها كانت الأعداد الوحيدة التي كان يعقلها الإنسان آنذاك.

[23←]
ريتشارد ديديكيند (1831-1916) عالم رياضيات ألماني وضع الأساس الرياضي لمفهوم الأعداد الحقيقية والأعداد اللامعقولة وله دراسات مهمة في علم الجبر.

[24←]
جورج كانتور (1845-1918). ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 4.

[25←]
روبرت ميليكان (1868-1953) عالم في الفيزياء التجريبية من مواليد الولايات المتحدة الأمريكية. حصل على جائزة نوبل في الفيزياء سنة 1923 تقديرًا لدراساته في قياس الشحنة الكهربائية للإلكترون ودراساته في التأثيرات الكهرضوئية. عمل رئيسًا لمعهد كاليفورنيا للتكنولوجيا Caltech في الفترة 1921-1945.

[26←]
أول من وضع رمز اللانهاية ∞ في الرياضيات هو عالم الرياضيات الإنكليزي جون واليس John Wallis (1616-1703) وذلك في عام 1655. له كتابات مهمة أيضًا في الجبر والمثلثات والهندسة وعلم الترميز Cryptography والفلسفة والمنطق.

[27←]
برنهارد بولزانو (1781-1848) عالم رياضيات وفيلسوف تشيكي له أيضًا كتابات مهمة في المنطق والفيزياء وفلسفة العلم.

[28←]
جورج كانتور (1845-1918) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 4.

[29←]
دافيد هيلبرت (1862-1943) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 16.

[30←]
أرخميدس (287-212 ق.م.) عالم رياضيات وفيزياء إغريقي له اختراعات هندسية عديدة وكتب أيضًا في علم الفلك. يعتبر من أهم العلماء في العصر الكلاسيكي. أهم منجزاته دراسة الروافع والمضخة الحلزونية وقوانين الطفو والمرايا والكثافة النوعية للمواد.

[31←]
طاليس (624-546 ق.م.) يعتبر أول الفلاسفة الإغريقيين قبل سقراط وفيثاغورس. له نظريات مهمة في الفلسفة والعلوم والفلك والهندسة المستوية.

[32←]
شارل دو كولون (1736-1806) فيزيائي فرنسي وضع قوانين مهمة في دراسة الكهرباء والمغناطيسية.

[33←]
الأعداد السالبة: عُرفت الأعداد السالبة في الصين منذ حوالي 100 سنة قبل الميلاد وكُتبتْ حينها باللون الأسود في حين كُتبت الأعداد الموجبة باللون الأحمر وذلك في كتاب "تسعة فصول في فن الرياضيات". واستخدم علماء الرياضيات في الهند الأعداد السالبة في القرن السابع الميلادي، وعرفوا الجذر التربيعي للأعداد السالبة (الأعداد التخيلية) في القرن الثاني عشر الميلادي. ورغم أن العالِم الإيطالي ليوناردو فيبوناشي Leonardo Fibonacci قد قدَّم الأعداد السالبة لأوروبا في القرن الثالث عشر مع سلسلة الأعداد الكسرية والعدد (صفر) نقلًا عن الخوارزمي، إلا أن الأعداد السالبة لم تكن مفهومة تمامًا في أوروبا حتى القرن الميلادي السادس عشر.

[34←]
رينيه ديكارت (1596-1650) عالم رياضيات وفيلسوف فرنسي شهير، يُعتبر مؤسس الفلسفة الحديثة ومن أهم مؤسسي الثورة العلمية. له دراسات مهمة في اللاهوت. يُعتبر مؤسس الهندسة التحليلية وصاحب المقولة الفلسفية الشهيرة: "أنا أفكر إذًا أنا موجود".

[35←]
ليونهارد أويلر (1707-1783) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 1.

[36←]
بول ديراك (1902-1984) فيزيائي إنكليزي شهير كان من أهم أساتذة الميكانيك الكمّي (المَوجي).

[37←]
كارل أندرسون (1905-1991) فيزيائي أمريكي من أصل سويدي حصل على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1936 تقديرًا لدراساته في ظاهرة الإشعاع والأشعة الكونية التي قادت لاكتشاف البوزيترون.

[38←]
ريتشارد فينمان (1918-1988) فيزيائي أمريكي له دراسات مهمة في الميكانيك الكمّي (المَوجي) والفيزياء الذرّية. حصل على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1965 تقديرًا لهذه الدراسات. شارك في صنع القنبلة الذَرّيّة ويعتبر من رواد تقنيات النانو Nanotechnology التي تدرس تشكيل المواد والأجهزة انطلاقًا من الجزيئات.

[39←]
غوتفريد لايبنيتز (1646-1716) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 19.

[40←]
كاسبر ويسل (1745-1818) عالم رياضيات نرويجي مختص في المساحة يرجع إليه الفضل في تقديم أول تفسير معقول للأعداد التخيلية.

[41←]
جيمس سيلڤستر (1814-1897) عالم رياضيات إنكليزي ساهم في وضع أسس نظرية المصفوفات وله دراسات مهمة في نظرية الأعداد وعلم الجبر المجرَّد.

[42←]
آرثر كايلي (1821-1895) عالم رياضيات إنكليزي ساهم أيضًا في وضع أسس نظرية المصفوفات ووضع أسس وتعريف المجموعات.

[43←]
ڤيرنِر هايزنبيرغ (1901-1976) فيزيائي ألماني شهير بحث في الميكانيك الكمّي (المَوجي) ووضع فيه مبدأ عدم التأكد وله أبحاث مهمة في الفيزياء الذّرّية. حصل على جائزة نوبل في الفيزياء سنة 1932 تقديرًا لأبحاثه في الفيزياء الذّرّية. عمل رئيسًا لمعهد ماكس بلانك للفيزياء وأبحاث الفضاء في الفترة 1947 حتى 1970.

[44←]
يوجين ڤيغنر (1902-1995) عالم رياضيات وفيزياء أمريكي من أصل هنغاري. حصل على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1963 تقديرًا لدراساته في الفيزياء الذّرّية والميكانيك الكَمّي (المَوجي) وتطبيق مبادئ التناظر فيهما. يعتبره بعض العلماء في مستوى أهمية أينشتاين في الفيزياء الحديثة.

[45←]
إيفاريست غالوا (1811-1832) عالم رياضيات فرنسي وضع نظرية مهمة في علم الجبر المجرَّد لحل المعادلات المعقدة. كان ناشطًا سياسيًّا ومؤيدًا متحمسًا للنظام الجمهوري.

[46←]
رينيه ديكارت (1596-1650) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 34.

[47←]
برنهارد ريمان (1826-1866) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 6.

[48←]
كارل فريدريك غاوس (1777-1855) عالم رياضيات وفيزياء ألماني شهير له نظريات هامة في علم الأعداد والإحصاء والتحليل والهندسة التفاضلية وعلم الفلك والبصريات. حمل لقب أمير علماء الرياضيات ويعتبره كثيرون أهم علماء الرياضيات في التاريخ الحديث وأكثرهم تأثيرًا في تطور الرياضيات.

[49←]
بنوا ماندلبرو (1924-2010) عالم رياضيات فرنسي من أصل بولوني يعيش في أمريكا منذ عام 1958. يعتبر مؤسس الهندسة التجزيئية Fractal Geometry وله دراسات مهمة في نظرية المعلومات وفي الاقتصاد وعلم الفلك.

[50←]
فيليكس هاوسدورف (1868-1942) عالم رياضيات ألماني يعتبر من مؤسسي الطوبولوجيا ونظرية المجموعات والهندسة التجزيئية. كتب أيضًا في الفلسفة ودراسة مهمة لأفكار الفيلسوف الألماني نيتشه.

[51←]
الصِفر: عبَّر البابليون في نظام أعدادهم الستيني عن الرقم (صفر) بترك مسافة فارغة بين الأعداد، ولم يعرف الإغريقيون العدد (صفر) في نظام أعدادهم. استخدم بطليموس في عام 130 ق.م. في نظام أعداد ستيني رمزًا يشير إلى العدد (صفر). ورغم أن قبائل المايا في أمريكا الجنوبية قد عرفت الرقم (صفر) وأدخلته في نظام أعدادها إلا أن مفهوم الصفر بمعناه الحقيقي في الرياضيات لم يظهر بوضوح إلا في الهند حوالي القرن الخامس قبل الميلاد واستُخدم في اللغة السنسكريتية باسم: سُنيا Sunya وانتقل بعدها إلى العرب الذين استخدموا كلمة الصِفر للتعبير عن هذا العدد. انتقل بعدها إلى أوروبا عن طريق عالم الرياضيات الإيطالي ليوناردو فيبوناشي (1170-1250) Leonardo Fibonacci الذي عاش في منطقة الجزائر في الشمال الأفريقي العربي ونقل مؤلفات الخوارزمي ونظام الأعداد العشري المطبق حاليًا في أوروبا وأمريكا، واستخدم كلمة زفيروم Zephyrum للتعبير عن الرقم (صفر) نقلًا عن العربية، والتي أصبحت زفيرو Zefiro في الإيطالية ثم إلى كلمة زيرو Zero في الفرنسية ومن ثم إلى الإنكليزية.

[52←]
غوتليب فريجيه (1848-1925) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 10.

[53←]
جورج كانتور (1845-1918) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 4.

[54←]
جون هورتون كونواي (1937-2022) عالم رياضيات إنكليزي له دراسات مهمة في نظرية الأعداد والمجموعات ونظرية المباراة Game Theory والهندسة والطوبولوجيا. يعمل أستاذًا للرياضيات في جامعة برينستون الأمريكية منذ عام 1986.

[55←]
كارل فريدريك غاوس (1777-1855) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 48.

[56←]

هنري بوانكاريه (1854-1912) عالم رياضيات وفيزياء فرنسي. له دراسات في فلسفة العلوم وكان ماهرًا في كافة فروع الرياضيات المعروفة في عصره. يعتبر من مؤسسي علم الطوبولوجيا ومبادئ النسبية. انتُخب رئيسًا للأكاديمية الفرنسية للعلوم سنة 1906.

[57←]
كارل فريدريك غاوس (1777-1855) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 48.

[58←]
يانوس بولياي (1802-1860) عالم رياضيات هنغاري يعتبر من مؤسسي الهندسة اللاإقليدية Non-Euclidean Geometry وله دراسات مهمة في الجبر والأعداد وكان يجيد تسع لغات.

[59←]
نيكولاوس لوباتشيفسكي (1792-1856) عالم رياضيات روسي من مؤسسي الهندسة اللاإقليدية. عمل رئيسًا لجامعة كازان Kazan University في الفترة 1827-1846.

[60←]
برنهارد ريمان (1826-1866) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 6.

[61←]
ألبرت أينشتاين (1879-1955) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 20.

[62←]
كورت غودل (1906-1978) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 13.

[63←]
برتراند رَسل (1906-1978) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 11.

[64←]
كريستيان غولدباخ (1690-1764) عالم رياضيات ألماني درس القانون وعُرف بملاحظته الخاصة في الحساب.

[65←]
ليونهارد أويلر (1707-1783) ذُكر سابقًا في الملاحظة رقم 1.

[66←]
نيكولاوس كوبرنيكوس (1473-1543) Nicolaus Copernicus عالم فلكي من أصل بولوني درس الطب والقانون في إيطاليا حيث ظهر اهتمامه بالفلك وكان أول من وضع الأساس العلمي للمجموعة الشمسية وأن الكواكب تدور حول الشمس وليس حول الأرض ونَشر ذلك في كتاب طُبع يوم وفاته. استفاد في وضع نظريته هذه من أعمال المفكرين الإغريق أريستاركوس Aristarchus وبونتيكوس Ponticus وفيلولاوس Philolaus والعلماء المسلمين ناصر الدين الطوسي ومؤيد الدين الأوردي وابن الشاطر.

[67←]
ويليام أوكام (1288-1348) كاهن وفيلسوف إنكليزي يعتبر من أهم مفكري العصور الوسطى وله كتابات مهمة في المنطق والفلسفة واللاهوت.

[68←]
إرنست ماخ (1838-1916).

[69←]
جورج غالوب (1901-1984) عالم إحصاء أمريكي من رواد أسلوب اختيار العيّنات الإحصائية النموذجية لقياس الرأي العام.

[70←]
جون فون نيومان (1903-1957) عالم رياضيات أمريكي من أصل هنغاري له مساهمات أساسية في نظرية المجموعات والميكانيك الكمّي (المَوجي) والاقتصاد وعلوم الكومبيوتر والجبر والإحصاء ونظرية المباراة. يعتبر من أهم علماء الرياضيات في القرن العشرين. شارك في صنع القنبلة الذَرّية والهيدروجينية. عمل في جامعة برنستون الأمريكية مع أينشتاين وغودل منذ عام 1933 حتى وفاته.

[71←]
جون ناش (1928-2015) عالم رياضيات واقتصادي أمريكي له كتابات مهمة في نظرية المباراة والهندسة التحليلية. عمل في جامعة برينستون الأمريكية وحصل على جائزة نوبل في العلوم الاقتصادية عام 1994 تقديرًا لدراساته في نظرية المباراة.

[72←]
فيلكس كلاين (1849-1925) عالم رياضيات ألماني اشتهر بأعماله في نظرية المجموعات والهندسة اللاإقليدية والتناظر المُجرَّد.

[73←]
أوغست موبيوس (1790-1868) August F. Mobius عالم رياضيات ألماني يعتبر من مؤسسي علم الطوبولوجيا في الرياضيات.

[74←]
رينيه توم (1923-2002) عالم رياضيات وفيلسوف فرنسي اشتهر بدراساته في الطوبولوجيا والهندسة التحليلية ونظرية الكارثة، وله دراسات في مؤلفات أرسطو العلمية.

[75←]
إيريك زيمان (1925-2016) عالم رياضيات إنكليزي ولد في اليابان لأب هولندي وأم إنكليزية. له دراسات مهمة في الطوبولوجيا ونظرية الكارثة وتطبيقاتها في علم الأحياء وعلم النفس.

[76←]
ريتشارد كارب (1935) عالم رياضيات وكومبيوتر أمريكي يعمل في جامعة بركلي الأمريكية. حاز على الجائزة الوطنية في العلوم تقديرًا لأبحاثه في المتوافقات.